Colecția MENTOR

MATILA C. GHYKA

FILOSOFIA ȘI MISTICA NUMĂRULUI

MATILA C. GHYKA s-a născut în 1881 la Iași. Era strănepot al lui Grigore Ghyka X, ultimul domnitor al Moldovei până la Unirea Principatelor. Năzuind, după cum mărturisește în Memoriile sale, spre o personalitate de „om universal", care să întrunească virtuțile lui Bartolomeo Colleoni și ale lui Pico della Mirandola, Matila Ghyka a făcut studii strălucite de inginerie la Academia Navală Franceză, studii de litere și de jurisprudență. Ofițer de marină, diplomat, matematician, filosof, poet și memorialist, el a elaborat o teorie filosofică și estetică în care formațiunile naturale (organisme vii și sisteme cristaline) și operele de artă sunt structurate deopotrivă de un ansamblu de analogii și proporții existente, matematic formalizabile. După o îndelungată carieră diplomatică, la sfârșitul celui de al doilea război mondial, a fost profesor de estetică la Universitatea din Los Angeles, iar după doi ani la Universitatea din Londra. S-a stins din viață la Londra, în 1965.

Alte opere teoretice:
Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts, Paris, NRF, Gallimard, 1926. *Le nombre d'or. Rites et rythmes pitagoriciens dans le développement de la civilization occidentale*, Paris, NRF, Gallimard, 1931, 2 vol. (introducere de Paul Valéry). *Essai sur le rythme*, 1938. *The Geometry of Art and Life*, New York, Sheed and Word, 1946.

MATILA C. GHYKA

FILOSOFIA ȘI MISTICA NUMĂRULUI

Traducere de
DUMITRU PURNICHESCU

Postfață de
CORNEL MIHAI IONESCU

univers enciclopedic
București, 1998

Coordonatorul colecției: CORNEL MIHAI IONESCU

Redactor: MONICA JITĂREANU

Copera: VENIAMIN & VENIAMIN

Tehnoredactare computerizată: LILIANA KIPPER
OFELIA COȘMAN

Matila Ghyka
PHILOSOPHIE ET MYSTIQUE DU NOMBRE
Copyright © 1952 by Payot Paris

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin
Editurii UNIVERS ENCICLOPEDIC

ISBN 973-9243-35-5

AVERTISMENT

al editorului francez la ediția a doua, din 1973

Prima ediție a acestei lucrări a apărut în 1952, iar autorul ei a decedat înainte de a fi putut pune la punct o nouă ediție.

Datorită originalității personalității și a tezelor lui Matila Ghyka ni s-a părut util, totuși, să reproducem ca atare textul primei ediții. De asemenea, am păstrat figurile și schițele pe care autorul le desenase în 1952. Chiar dacă, în planul execuției, aceste documente sunt de o calitate mediocră, ele oferă privilegiul de a reproduce fidel studiul lui Matila Ghyka, întocmai cum, pe parcursul manuscriselor, a ieșit de sub pana sa.

Ceea ce cartea pierde în planul calității tehnice, regăsește din plin în cel al autenticității.

CUPRINS

Capitolul I
Noțiunea de număr — Ideile și numerele — Numărul în Biblie, în Caldeea și în Egipt — Concepția grecească despre număr: cele trei definiții — Numere vulgare și numere divine 9

Capitolul II
Societatea Numerelor — Mistica pitagoreică a numerelor pure — Monadă, diadă, triadă, tetraktys, pentadă, decadă 17

Capitolul III
Armonia numerelor și a Cosmosului în doctrina lui Pythagoras — Corelația Univers–Templu–Om — Marea piramidă — Triunghiul lui Pythagoras și triunghiurile diofantine — Triunghiul lui Pythagoras transmis de Caldeea și Egipt Europei neolitice 24

Capitolul IV
Viața și legenda lui Pythagoras — Platon și neopitagorismul — Cea de-a VII-a scrisoare a lui Platon 35

Capitolul V
Gândirea occidentală și principiul analogiei — Proporția, reflectare matematică a analogiei — Teoria pitagoreică a proporțiilor — Secțiunea de Aur — „Symmetria" lui Vitruviu și principiul analogiei al lui Thiersch 47

Capitolul VI
Numerele și formele-numere figurate plane și solide ale celor vechi și ale lui Descartes — Numere figurate cu n dimensiuni — Triunghiul, piramida și hiperpiramida lui Pascal 64

Capitolul VII
Cabala și numerele — Influența Pitagorismului asupra gândirii creștine și ebraice — Cabală, gnoză și magie — Pentacluri, Faust, Agrippa și Paracelsus 86

Capitolul VIII
Avatarele pentagramei — Corporațiile de constructori — Transmiterea planurilor de construcție — Societățile secrete chinezești — Concepția chinezească despre număr: permutări și combinări — „Cartea transformărilor" 95

Capitolul IX
Numărul și matematica modernă — Numere raționale, întregi și fracționare — Numerația în baze diferite — Concepția despre infinitul actual — Principiul inducției totale — Paradoxul lui Borel — Fracțiile periodice 104

Capitolul X
Numere iraționale — Numere algebrice și transcedente — Numere reale și imaginare — Câteva numere remarcabile — Numerele transfinite ale lui Cantor 119

Capitolul XI
Geometrii cu un număr oarecare de dimensiuni — Tot despre politopii cu patru dimensiuni — Echipartițiile spațiului și ale hiperspațiilor — Geometrii neeuclidiene 138

Capitolul XII
Permutări și combinări — Tot despre triunghiul lui Pascal — Polinomul lui Leibniz — Piramida și hiperpiramida lui Pascal — Pătrate magice 147

Capitolul XIII
Logistica — Axiomaticile lui Peano și Hilbert — Logica clasică, logica simbolică și logica pozitivistă 166

Capitolul XIV
Cibernetica 179

Capitolul XV
De la număr la abstracția pură — Teoria grupurilor și invarianților — Relativitate și mecanică cuantică ondulatorie — Principiul minimei acțiuni 192

Capitolul XVI
Număr și poezie — Notația lui Pius Servien — Dihotomia limbajului — Limbajul științific și limbajul liric — Metafora și analogia 213

Capitolul XVII
Numărul și muzica — Teoria matematică a gamelor — Modulația, proporția, euritmie 223

Capitolul XVIII
Numărul și chimia — Chimia anorganică și chimia organică — Tabelul lui Mendeleev și tabelul lui Mendel — Teoria lui Schrœdinger despre mutații — Numărul și undele 248

Concluzii 275

CAPITOLUL I

NOȚIUNEA DE NUMĂR – IDEILE ȘI NUMERELE – NUMĂRUL ÎN BIBLIE, ÎN CALDEEA ȘI ÎN EGIPT – CONCEPȚIA GRECEASCĂ DESPRE NUMĂR: CELE TREI DEFINIȚII – NUMERE VULGARE ȘI NUMERE DIVINE

Și atunci toate aceste specii astfel alcătuite și-au primit de la Orânduitorul lor înfățișarea, prin acțiunea Ideilor și a Numerelor.

(TIMAIOS)

Fraza din *Timaios*, care servește drept epigraf acestui capitol și, aș putea zice, acestui întreg studiu, rezumă într-o efigie de medalie concluziile lui Platon cu privire la Univers, precum și pe acelea ale inspiratorului său, Pythagoras: teoria arhetipurilor și „Legea Numărului". Se întâmplă că punctele de vedere și consecințele fizicii matematice de astăzi se potrivesc și cu aceste două rânduri din Platon; ele par să lumineze întreaga dezvoltare de mai târziu a gândirii occidentale.

Bertrand Russell a fost primul care a remarcat întoarcerea științei moderne la disciplinele pitagoreice; se gândea, firește, pe de o parte la relativitatea generală, așa cum a fost prezentată de Einstein și, pe de altă parte, la teoria cuantelor și la mecanica ondulatorie datorate lui Max Planck și lui Louis de Broglie.

Ne vom ocupa aici, în mod cu totul special, de Număr; înainte să purcedem la cercetarea rolului Numărului și al Numerelor de-a lungul veacurilor, se cuvine să examinăm mai întâi originea acestei noțiuni. Pentru aceste începuturi îndepărtate nu avem altă călăuză decât aritmetica primitivă remarcată la populațiile înapoiate care mai există și în ziua de astăzi și putem să ne închipuim fără teama de a ne înșela prea mult, prin analogie, origini asemănătoare la strămoșii noștri aurignacieni, magdalenieni, sumerieni, semiți, sau mediteranieni propriu-ziși. Chiar la populațiile zise sălbatice, ideile referitoare la Număr prezintă noțiuni asociate cu filosofia și magia. Numărul Unu este totodată unitate de calcul (uneori singura,

numerele cuprinzând numai cele două concepții de „Unu" și „Mai mulți" sau „Mult") și simbol al unității în general, ca și al identității Eului cu el însuși, ca opus restului Universului, ceea ce de altfel implică deja o dualitate.

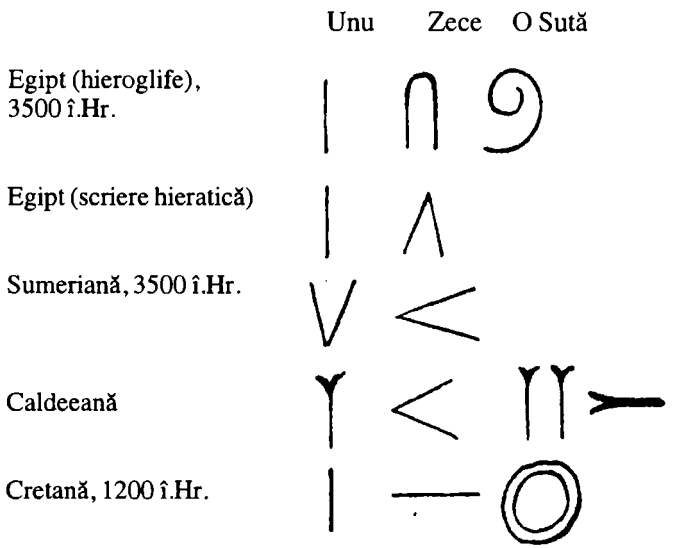
Stadiul următor este atins o dată cu conceptul explicit al numărului Doi și al Dualității, origine a conceptului pe care grecii l-au numit „Același și Altul", Altul fiind mulțimea nedefinită a numerelor mai mari decât Unu. Anumite triburi australiene și boșimanii din Africa Meridională folosesc această numerație diadică, cu simboluri doar pentru *unu* și *doi*; astfel, orice alt număr este o combinație de 1 și 2, de pildă, 5 = 2 + 2 + 1. Alți primitivi (în California, de exemplu) folosesc o numerație în care patru este numărul cel mai mare (ex.: 7 = 4 + 3), alții (Arowaks din America de Sud) au o numerație cvinară (firească din pricina numărului de degete), alții (în Africa) o numerație hexadică, avându-l pe 6 drept cel mai mare număr.

Dacă, în loc să-i cercetăm pe contemporanii noștri, efectuăm o investigație în timp până la începuturile civilizației noastre, sau mai degrabă până la apariția primelor documente scrise care au ajuns până la noi, găsim la sumerienii din Mesopotamia (către 3500 î.Hr.) folosirea unui sistem duodecimal sexagesimal inspirat, fără îndoială, de ciclul lunar. Dimpotrivă, evreii și ceilalți semiți, amoriții, fenicienii, arabii ca și arienii din India, asemeni egiptenilor (inscripție datând tot din anul 3500 î.Hr.), preferau un sistem cu bază zecimală. Semiții babilonieni și caldeeni din ultimile două milenii înaintea erei noastre au îmbinat sistemele zecimal și sexagesimal sau duodecimal.

Datorită cercetărilor lor astronomice și a stabilirii unui calendar destul de precis, mayașii din Yucatan aveau deja, către anul 500 î.Hr., un sistem de numerație precis cvinar–duodecimal, adică fondat pe 5 și 20 [simboluri respective – și (.)]. Literele alfabetului grec, apoi ale celui roman, au fost împrumutate din alfabetul fenician (către 1000 î.Hr.); fenicienii și evreii, apoi grecii au folosit literele alfabetului drept cifre, cu litere speciale pentru zece, o sută, o mie. Zecele ebraic, de pildă, era Yod sau G aspirat; în cabală Zece a fost numărul perfect și a devenit acel G din pentaclurile magice, apoi din Steaua strălucitoare (pentagon înstelat sau pentagramă) masonică. La fel ca la primitivi, primele calcule ale timpului au fost efectuate mai întâi cu 5 apoi cu 10 degete, pe urmă cu pietricele – de unde cuvântul calcul (de la *calculus*, pietricică) –, iar mai târziu cu

ajutorul abacelor cu bile (China, Rusia), care permiteau și operații mai complicate.

Simboluri de numerație



Acest domeniu al numerației la primitivi a fost studiat în detaliu în lucrări speciale și nu voi vorbi aici mai pe larg despre conținutul lor, decât doar pentru a nota, de pe acum, că în Grecia sau, mai degrabă, în Magna Graecia, înlocuind numerele cu grupuri de puncte aranjate geometric, pitagoreicii au dezvoltat disciplina Numerelor Figurate, care le-a îngăduit să priceapă, în mod direct, corelațiile dintre numere și figurile geometrice plane și în spațiu, apoi să transporte numărul în centrul unei metafizici purificate care, o dată cu Pythagoras, a făcut din acesta arhetipul sau paradigma prin excelență a unei doctrine rezumată de „Totul este rânduit după Număr", și în care a fost dat Universului numele *Cosmos* (lume armonios ordonată). Chiar cuvintele cosmos și filosofie sunt, după o tradiție necontestată, atribuite lui Pythagoras.

Dar înaintea grecilor, care au studiat temeinic numerele întregi și fracționare, și apoi, prin intermediul diagonalei pătratului

($\sqrt{2}$ pentru un pătrat cu latura 1) și al teoremei ipotenuzei, au descoperit numerele iraționale, trebuie să-i menționăm din nou pe caldeeni și pe egipteni; cu toate că nu au căutat, precum mai târziu pitagoreicii, să despartă ideea abstractă a Numărului de folosirea ei practică, datorită lor aritmetica și geometria aplicată (cea a arpentorului, etimologia însăși a cuvântului *geometrie*) au făcut progrese de care grecii au profitat. Civilizația caldeeană, sau mai curând sumeriană, este, într-un anumit sens, mama culturilor occidentale; în Mesopotamia superioară omul neolitic inaugura, la începutul celui de al VI-lea mileniu înaintea erei noastre, civilizația propriu-zisă, clădind primele sate, apoi primele cetăți, cultivând plante comestibile (grâu și orz), domesticind unele animale, modelând oale încă de pe atunci remarcabile. La Eridu, cu vreo 4500 de ani înaintea erei noastre, se năștea cea dintâi civilizație urbană cu temple și palate. Anumiți etnologi postulează pentru protosumerieni, pentru populațiile neolitice din bazinul dunărean (reprezentante principale ale cultului Marii Zeițe Mame, făuritori ai „ceramicii pictate") și pentru chinezii din epoca legendară a celor Cinci și a celor Trei Împărați, o origine comună, având drept punct de plecare nord-vestul Rusiei actuale, între Marea Baltică și Marea Albă; ar putea fi vorba de rămășițe protoariene, ramuri din rasa magdaleniană sau chiar aurignaciană. Dar dezvoltarea matematicii caldeene și egiptene a fost favorizată în egală măsură de tehnica adoptată pentru măsurarea câmpurilor terestre și metoda referitoare la distanțele și traiectoriile cerești, în special prezicerile de eclipse, calendarul lunar, așezarea zodiacului au inspirat popoarelor ciclului caldeean – sumerieni, akkadieni, babilonieni, asirieni, ahemenizi –, sistemul de numerație bazat pe numerele 12, 20, 60 sau sistemul sexagesimal peste care, sub influența semiților babilonieni, s-a suprapus sistemul zecimal.

În Egipt, unde, ca și la semiți, domina numerația zecimală, s-a dezvoltat mai curând geometria arpentorilor și a arhitecților decât cea a astronomilor și astrologilor, cu toate că orientarea spre Polul Nord ceresc a galeriei descendente a Marii Piramide era stabilită cu rigoare. Dar precizia aproape halucinantă a planurilor, a templelor și a mormintelor egiptene, ca și aceea a stelelor și a basoreliefurilor asociate, dezvăluie aplicarea unei curioase și originale aritmetici a fracțiilor, combinată, după cum vom vedea în capitolul următor, cu folosirea unui anumit șir definit prin recurență cu doi termeni, ce îngăduie să se obțină aproximații, cât mai riguroase cu putință, ale lungimilor iraționale descoperite și folosite mai târziu de greci.

Totuși, în ritualul religios sau magic egiptean numerele, îndeosebi ceea ce pitagoreicii au numit „Numărul Pur" sau „Divin", nu au atins importanța acordată cuvintelor, a cuvintelor încărcate de putere pe care le dețineau Isis, zeița cu șapte văluri, și Thot–Hermes.

Găsim în Biblie, sau ni se pare că găsim, în „Cartea Înțelepciunii lui Solomon", cea dintâi menționare a numărului ca abstracție: „Dumnezeu a rânduit totul cu măsură, cu număr și cu cumpănă".

Dacă această frază i s-ar fi datorat lui Solomon însuși, am fi putut considera că a inspirat doctrina pitagoreică a Numărului, dar exegeza biblică a dovedit că această „Carte a Înțelepciunii" a fost redactată în cursul celui de al doilea secol dinaintea erei noastre de un evreu din Alexandria, care avea, pesemne, legături cu renașterea pitagoreică, al cărei centru de răspândire era Alexandria. Așadar, nu Biblia a influențat, în această privință, gândirea greacă; numărul a fost mai întâi considerat „arhetip" chiar în Grecia, sub egida lui Pythagoras (580–500 î.Hr.) și tot aici maestrul din Samos a formulat celebrul

„Totul este rânduit după număr"
(ἀριθμῶ δέ τε πάντ' ἐπέοικεν)

transmis prin „Hieros Logos" sau Discursul Sacru, redactat după moartea sa de către câțiva discipoli, printre care se număra, pesemne, și fiul său.

Aristoxenos din Tarent, citat de Stobaios, scrie de asemenea:

„Pythagoras (gândea că) toate lucrurile sunt orânduite după Numere".
(Πυθαγόρας πάντα τὰ πράγματα ἀπεικάζων τοῖς ἀριθμοῖς)

Găsim și în *Theologumena Arithmeticae,* scriere a lui Nicomachos din Gerasa[1], neopitagoreic de la începutul erei noastre, pe care vom mai avea prilejul să-l citățm de mai multe ori, pasajul următor:

„Haosul primitiv, lipsit fiind de ordine și de formă, și de tot ceea ce deosebește potrivit categoriilor calității, ale cantității etc., a fost organizat și rânduit după Număr".

Pitagoreicii, adică membrii Confreriei întemeiate în Magna Graecia de Pythagoras, au dat trei definiții numărului, plecând de la trei puncte de vedere diferite. Numărul este, mai întâi, împărțit în Numere Pure sau Divine, de care se ocupă mistica Numărului (aritmologia), în Numere științifice (ἐπιστημονικός ἀριθμός), și în

numere concrete, de care se ocupă calculul propriu–zis (λογιστική) al negustorilor.

Potrivit lui Nicomachos, numerele științifice sunt împărțite, la rândul lor, în trei categorii:

1° O multitudine limitată (am zice astăzi: mulțime numărabilă finită). Este acel ποσότης propriu-zis.

2° O alcătuire de monade, adică de unități (Theon din Smirna, circa A. D., în *Expositio Rerum Mathematicorum ad legendum Platonis utilium*, scrie: „Pitagoreicii considerau toți termenii din seria naturală a numerelor drept principii, astfel încât, de exemplu, printre obiecte sensibile trei (triada) este principiul pentru trei și patru (tetrada) principiul tuturor patru, etc...".

Este aproape definiția lui Bertrand Russell a numerelor considerate drept „clase de clase". Aceste unități, aceste monade pot fi puncte și atunci pot da naștere lumii, care e și geometrică și algebrică, a numerelor „figurate", plane (triunghiulare, pătrate, pentagoane etc...) și solide (piramidale sau tetraedice, cubice, paralelipipedice etc.) pe care primii μαθεματικοί din confrerie le-au studiat deja în Sicilia.

3° Un val, o curgere de monade:

ποσότητος χύμα μονάδων συγκείμενον.

Am văzut deja că, în afara acestor numere științifice și a numerelor obișnuite, pitagoreicii făceau o distincție suplimentară între aceste două categorii și ceea ce ei numeau „Numere pure" sau „Divine". Cel mai bun lucru pe care îl pot face este să reproduc aici prezentarea Numărului Divin de către Nicomachos din Gerasa în Theolegumenele sale: „Principiile (ἀρχαί, origini) Numărului și ale tuturor celorlalte lucruri sunt «Același și Altul» (sau calitatea de a fi același lucru sau de a fi altceva[2]). Cei din vechime, care sub îndrumarea spirituală a lui Pythagoras au dat cei dintâi științei o formă sistematică, au definit filosofia ca iubirea de Cunoaștere... Cele necorporale – precum calitățile, cantitățile, egalitatea... relațiile, pozițiile... locurile, timpul... – sunt, în esență, imuabile și interschimbabile, dar pot participa, accidental, la vicisitudinile corpurilor cărora le sunt atribuite.

Și dacă, în mod accidental, cunoașterea se ocupă și de corpuri, suporturi materiale ale lucrurilor necorporale, totuși de acestea din urmă ea se va lega în mod deosebit. Căci aceste lucruri imateriale, veșnice, constituie adevărata realitate. Iar ceea ce este supus

alcătuirii și distrugerii... (materia, corpurile) nu este actualmente real prin esență (Putem observa de pe acum cât de mult se înrudește această concepție despre lume cu aceea pe care ne-a dat-o fizica matematică modernă, în care nu contează decât structura, invariantul.)

Tot ceea ce natura a orânduit sistematic în Univers se vădește, în părțile sale ca și în tot întregul, a fi fost stabilit și potrivit cu Numărul, prin prevederea și gândirea celui ce pe toate le-a zămislit; căci modelul era fixat, precum o schiță preliminară, prin puterea suverană a numărului preexistent în spiritul lui Dumnezeu creator al lumii; număr–idee ce este, în chip pur, imaterial din toate punctele de vedere, dar totodată esență adevărată și veșnică, astfel încât în armonie cu numărul, ca după un plan artistic, au fost create toate acestea, și timpul, mișcarea, cerurile, astrele, precum și ciclurile tuturor lucrurilor."

Precum odinioară Nicomachos, știința a suprimat iarăși barierele între matematică și logică: teoria mulțimilor, a claselor și a relațiilor a lui Cantor–Russell–Whitehead, axiomatica lui Hilbert, calculul tensorial și cercetarea, cu ajutorul lui, a invarianților și constantelor cosmice sunt capitolele unei singure științe, noua *Logistică*.

Acestor definiții ale Numărului, datorate lui Russell și lui Cantor, li se adaugă, după cum am văzut, nuanța metafizică ce face din număr marele arhetip, simbolul esențial și, de asemenea, maestrul formelor.

Platon, după cum s-a arătat la începutul acestui capitol, adăugase Numerelor Ideile, ca instrumente principale ale Marelui Ordonator sau „Dumnezeu orânduind cu măiestrie"; știm ce înrudire curioasă asocia idei, forme, imagini în gândirea grecească. Εἶδος este o formă precum și o idee; nu este atât o stare mentală cât modelul ideal (arhetip sau paradigmă) către care năzuiește gândirea. Derivatul său εἴδωλον (de unde *idol)* este imaginea propriu-zisă. Forma-gând poate fi uneori o lege care guvernează un aranjament formal, ca în definiția: „Forma este legea în virtutea căreia motivul se repetă."

Aceasta ne duce cu gândul la ritm.

NOTE

[1] Nicomah din Gerasa (colonie grecească din Palestina, întemeiată de către acei γερονΤες, veterani ai lui Alexandru), zis „Pitagoreicul", a trăit în secolul I al erei noastre; a studiat pesemne la Alexandria. Două dintre lucrările sale au ajuns în întregime până la noi: un „Manual de Armonie" și „Introducere în Aritmetică" (zisă *Isagoge*); o mare parte din *Theologumena Arithmeticae* (Mistica Numărului) ni s-a păstrat datorită unei compilații realizate de Iamblichos (Roma, sec. IV î.Hr.), autor al faimoasei *Vieți a lui Pythagoras*. Traducerea cea mai vestită (în latină) a *Isagogii* este cea a lui Boethius (Roma, sec. V) care a exercitat o influență enormă de-a lungul întregului Ev Mediu.

[2] Moderatus din Gades (pitagoreic de marcă și matematician din epoca lui Nero), scrie (citat de Porphyrios): „Pitagoreicii numesc «Unu» ideea de identitate, de unitate, de egalitate, de concordie și de simpatie în lume, și «Doi» ideea de «altul», discriminare, inegalitate".

CAPITOLUL II

SOCIETATEA NUMERELOR - MISTICA PITAGOREICĂ A NUMERELOR PURE - MONADĂ, DIADĂ, TRIADĂ, TETRAKTYS, PENTADĂ, DECADĂ

Dumnezeu a făcut numerele întregi,
toate celelalte sunt opera oamenilor.
(KRONEKER)

Asocierea etimologică ῥυθμός – ἀριθμός, ritm – număr (amândouă derivate din ῥέω, ῥεῖν, „a curge"), subliniază caracterele comune ale numerelor și ale ritmului ca flux monadic în geneza numerelor (flux neîntrerupt ca o curgere, dar care produce, la fiecare treaptă, numere foarte individuale), și ca flux dinamic cu repetiții sau periodicități în cazul ritmului. Tuturor definițiilor care, de-a lungul epocilor, au fost date ritmului, o prefer pe cea a lui Pius Servien:

„Ritmul este periodicitate percepută. El acționează în măsura în care o asemenea periodicitate deformează în noi curgerea obișnuită a timpului. Astfel, orice fenomen periodic perceptibil simțurilor noastre se desprinde de mulțimea fenomenelor neregulate... pentru a acționa singur asupra simțurilor noastre și a le impresiona într-un fel cu totul disproporționat față de intensitatea redusă a fiecărui element activ."

În lucrarea intitulată *Les Rythmes comme introduction physique a l'Esthétique* (ed. Boivin), Dl. Pius Servien arată că, pe lângă transpunerea analogică în durată a noțiunilor de proporție și de simetrie, ce țin (precum acordurile muzicale și timbrul) de domeniul continuului, urzeala analizabilă a ritmului sonor este formată din periodicitățile numărabile (discontinue).

Găsesc în cotidianul *Times* (din 14 ianuarie 1944) această excelentă definiție condensată: „Ritmul este experiența șuvoiului ordonat al unei mișcări".

Dl. Francis Warrain, scoțând în relief o analogie desăvârșită, a scris: „Ritmul este pentru timp ceea ce simetria este pentru spațiu."

Este riguros adevărat, însă cu condiția să nu iei ca sens al cuvântului „simetrie" accepțiunea modernă a termenului (repetare a unor elemente identice, de o parte și de alta a unei axe sau plan de simetrie), ci sensul antic, păstrat în Evul Mediu și la începutul Renașterii: repetare a unor forme *asemănătoare*, într-o comodulație obținută printr-un șir de proporții. Proporția și simetria în spațiu corespund, astfel, perfect ritmului în durată. Vom regăsi simetria și definiția ei clasică dată de Vitruviu într-un alt capitol, ca și legăturile dintre ritm și proporție.

Să ne întoarcem la noțiunea grecească de număr, noțiune precum am văzut tripartită, ca mod de formare pentru numerele pe care le-am numit științifice.

Disciplina pitagoreică a „Numerelor Figurate" (figurate prin îmbinări de puncte, ce corespund și unor creșteri omotetice, „gnomonice", de figuri geometrice), disciplină care este, între altele, o excelentă introducere în calculul diferențelor întregi, aplicat în algoritmii unor mașini de calculat, și totodată o introducere, după cum vom vedea mai departe, în geometria poliedrelor și hiperpoliedrelor regulate, i-a făcut pe greci să observe că în ciuda unui mod de formare uniform, fiecare număr, are caracteristici care în general îl deosebesc de toate celelalte. Este remarcabil, desigur, și se observă deja în primele numere întregi, cum ar fi 2, 3, 4, 5, faptul că adunarea numărului 1, a unității, schimbă de fiecare dată în întregime proprietățile unui număr întreg, scoțând în evidență un nou individ în „societatea Numerelor"; acest lucru se aplică atât „Numerelor Pure" cât și „Numerelor Științifice".

Nu are rost să mai vorbim despre caracteristicile Monadei, ale numărului Unu, care este nu numai elementul aditiv ce îngăduie să se producă, prin iterație, întregul șir al numerelor întregi, ci și, în logica pură și în logistica modernă, rădăcina sau (după preferințe) reflectarea principiului Identității; apare, de asemenea, cu totul firesc în principiul de inducție totală. Nu ne vom ocupa nici de Monadologia lui Leibniz și nici de toate construcțiile metafizice construite pe Unitate.

Diada, sau Numărul Doi, primul număr par și feminin[1], apare, sub aspectul potențialităților sale, în calculul combinărilor în aritmetică, dar și în logistică și în logica pură și chiar în metafizică, drept rădăcină a ideii de Dualitate[2], a principiului noncontradicției, a opoziției între eu și non-eu (Universul exterior).

Triada, primul număr impar și masculin (Unitatea este mai degrabă un principiu decât un număr), își desfășoară toată importanța, toată puterea sa genetică în teoria Numerelor Figurate; vom vedea mai departe că numerele triunghiulare, sau mai degrabă imaginile lor geometrice sub formă de îmbinări de trei puncte, furnizează principiul geometric de formare și de creștere a tuturor figurilor regulate plane și solide cu 3 sau cu un număr oarecare de dimensiuni. Ca numere propriu-zise, aceste numere triunghiulare domină și teoria combinărilor și permutărilor.

Tetrada, sau numărul Patru, participă atât la caracterul Diadei, al cărei pătrat este (fiind ultrapar, ultrafisionabil), cât și la caracterul sacru al Tetraktys-ului, al patrulea număr triunghiular, care este însă și simbolul figurat al foarteimportantei Decade (numărul zece).

Pentru membrii Confreriei Pitagoreice, diagrama punctuală a Tetraktys-ului a fost un simbol ezoteric la fel de important ca pentagrama care era, după cum vom vedea, parola lor secretă. Evocând Tetraktys-ul, membrii sectei depuneau jurământul solemn de a nu-și divulga niciodată secretele, între altele secretele matematice. Iamblichos ne-a păstrat formula jurământului: „Nu, jur pe cel care a transmis sufletului nostru Tetraktys-ul, în care se găsesc izvorul și rădăcina veșnicei naturi".

Iată textul rugăciunii pitagoreice către Decadă:

„Binecuvântează-ne, număr divin, tu care i-ai zămislit pe zei și pe oameni! O sfânt, sfânt Tetraktys, tu care cuprinzi rădăcina și izvorul șuvoiului veșnic al creației! Căci numărul divin începe cu unitatea pură și profundă și atinge mai apoi numărul sacru patru; apoi el o zămislește pe mama a toate câte sunt, care leagă totul, cel dintâi născut, cel care nu greșește niciodată, care nu pregetă niciodată, Zecele Sacru, care ține cheia tuturor lucrurilor."

Tetraktys-ul era surprins nu numai în natura Decadei și în cea a numerelor triunghiulare, ci și în armonia muzicală care, vom vedea, ocupa în ideologia pitagoreică un rol de prim ordin atât ca simbol al armoniei din Cosmos, cât și ca tehnică sugestivă folosită pentru a crea atmosfera prielnică ritualului sectei (în paralel cu folosirea unei miresme – tămâie specială[3] și a unei băuturi a cărei formule era ținută și ea secretă). Legătura dintre Tetraktys și gama diatonică pitagoreică provenea din faptul că o liră tetracordă, având corzile de lungimi proporționale cu 1, 2, 3 și 4, producea atât octava (în raport de 4/2 sau de 2/1), cât și intervalele de cvintă (3/2) și de cvartă (4/3).

Tetraktys-ul era astfel identificat în „catehismul" pitagoricienilor cu Armonia Sferelor sau a sirenelor planetare; „Tetraktys, armonie pură, cea a Sirenelor" (*Iamblichos*, citat din Aristotel).

În stereochimie, valența cvadruplă a carbonului (carbon tetraedric) joacă un rol important în numeroșii compuși organici sau anorganici.

Patru, număr feminin prin excelență, era pentru chinezi semnul Pământului, uneori al Împărătesei, al căror simbol comun era un cub alungit străbătut de o gaură cilindrică. Tot cubul era și pentru Platon simbolul Pământului.

Pentada, sau Numărul Cinci, era pentru pitagoreici aproape la fel de importantă ca Decada, fiindu-i acesteia jumătate și imaginea reflectată condensată. Compusă din primul număr impar, masculin, asimetric, propriu-zis (după Monadă), adică trei, și din primul număr par feminin, doi, ea reprezenta pentru greci Numărul Iubirii (Πέντε Γάμος), Numărul Afroditei ca zeiță a împreunării roditoare, a Iubirii zămislitoare, arhetip abstract al procreării. Pentada este totodată numărul armoniei în starea de sănătate ("Υγεια) și al frumuseții încarnate în corpul omenesc, proiecție în plan material a sufletului cosmic, a Decadei – macrocosmos, reflectând asemenea ei ritmul cuprinzător al Vieții Universale. Acest sincronism între ritmurile sufletului individual „bine acordat" și cel al „Sufletului Lumii" este limpede specificat în *Timaios*:

„Apoi, în acest corp în care năvălește și din care se scurge un șuvoi (Viața) necurmat, ei (zeii) introduc mișcările periodice ale Sufletului nemuritor".*

Emblema geometrică a Pentadei este Pentagrama, stea regulată în cinci colțuri care, o știm de la Lucian, era parola secretă și simbolul geometric al confreriei pitagoreice[4].

În morfologia biologică rolul Simetriei pentagonale și al Secțiunii de Aur care îi este asociată[5] a fost ghicit intuitiv de către pitagoreici și de Platon; Luca Pacioli (*Divina Proportione*, 1509) a interpretat subtil aluziile criptice ale lui Platon în legătură cu dodecaedrul (cu 12 fețe pentagonale), dezvoltare în cea de-a treia dimensiune a pentagonului regulat, dar rolul acesta a fost lămurit numai destul de recent.

Nu vom insista asupra numărului Șase sau Hexada decât pentru a menționa rolul echipartițiilor și al simetriilor hexagonale în

* *Timaios*, 43a.

cristalografie. Șase reprezintă îndeajuns de logic stabilitatea și echilibrul; Vitruviu îl semnalează ca număr perfect (este și în aritmetică perfect întrucât este suma factorilor săi $6 = 1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3$), el reprezentând pentru magicieni și alchimiști, moștenitori ai tradițiilor pitagoreice ale Gnozei și Cabalei, natura neorganizată, *natura naturata*.

Șapte este important mai ales ca număr sacru în mistica ebraică și caldeeană; pentru pitagorici el era emblema Virginității (ὁ ἑπτὰ παρθένος).

Să subliniem că nu se poate împărți un cerc în 7 segmente egale printr-o construcție euclidiană, în timp ce acest lucru este posibil pentru 3 și 5. Șapte este așadar dacă vreți „arhiprimul", iar virginitatea lui este de netăgăduit.

În sfârșit, ca să ne limităm la cele mai importante dintre primele numere întregi:

Decada – nu are rost să insistăm asupra rolului Numărului Zece în sistemul de numerație adoptat de cele mai multe națiuni civilizate, nu acest aspect îi interesa pe pitagoreici. Atribuindu-i Decadei demnitatea de „Număr al Lumii", ea avea pentru ei tripla calitate:

1° de a fi dublul Pentadei (în geometrie ea repetă simetria pentagonală și reflectă totodată proporția din Secțiunea de Aur: raportul dintre raza cercului circumscris decagonului regulat și latura acestuia este $\frac{R}{d_r} = \varnothing = 1{,}618$, și se întâmplă același lucru cu raportul dintre latura decagonului sub formă de stea și raza cercului circumscris, $\frac{d_c}{R}$);

2° de a prezenta suma punctelor conținute în Tetraktys-ul[6] deja prezentat;

3° de a fi, în sfârșit, asemenea Decadei, simbolul Cosmosului; să-l citățm din nou pe Nicomachos din Gerasa. După ce a introdus, așa cum am văzut mai înainte, măreția Numărului Pur sau Divin, Număr paradigmă preexistând în gândirea Dumnezeului creator, el continuă:

„Dar, întrucât totul era o multitudine nelimitată, trebuia o Ordine..., or, în Decadă preexista un echilibru natural între ansamblu și elementele sale... De aceea Dumnezeu, orânduind cu măiestrie în numele Rațiunii sale, a folosit Decada ca pe un canon pentru tot... și

de aceea lucrurile dintre cer și pământ au pentru ansambluri și părți raporturile lor de concordanță bazate pe ea și ordonate după ea." Să amintim că „raportul de concordanță", proporția dominantă în decagon, imagine geometrică a decadei, este proporția Secțiunii de Aur, dominantă și în pentagramă, simbolul secret al pitagorismului. Vitruviu folosește aceleași expresii când definește euritmia unei compoziții arhitecturale și subliniază, de asemenea, importanța numărului zece în jocul proporțiilor unui Templu; căci arhitectura grecească, inspiratoare a lui Vitruviu, era ezoterică, iar ezoterismul ei era împrumutat tocmai de la mistica pitagoreică a numerelor. (cf. cărții mele *Numărul de Aur*).

În chip de concluzie, Nicomachos numește Decada Totul (Παν) „căci în mâna Orânduitorului ea a servit drept măsură a totului asemeni unui echer și unei sfori".

Pentru a merge ceva mai departe în tradiția greacă, știm că Speusippos, nepot al lui Platon, a scris în tratatul său despre Numerele Pitagoreice:

δεκάδος παράδειγμα τῷ τοῦ παντὸς ποιητῇ θεῷ

„Decada a fost paradigma (modelul) folosită de Dumnezeul Creator pentru tot", (se vede asocierea etimologică între poezie și creație).

Pentru a termina această sumară trecere în revistă a „Numerelor Divine", voi cita un pasaj din textul imnului orfic închinat Numărului (Εἰς τὸν Ἀριθμὸν ὕμνος), și care folosește termeni atât de arzători cât îngăduie „Mistica de gheață a Numărului Pur".

„Din peștera neîntinată a Monadei până la numărul sacru al Tetradei din care cu adevărat a ieșit maica roditoare a tot, cea care, mai însemnată decât tot, cuprinde tot, neclintită, veșnică, cea căreia zeii nemuritori și oamenii ieșiți din țărână îi zic Decada Pură".

NOTE

[1] Corelația, impusă autoritar de către pitagoreici și de către filosofii chinezi, între numerele pare și principiul feminin, mai întâi datorită facultății de divizare prin sciziparitate a acestor numere, este de altfel îndreptățită în biologie în care principiul masculin este asociat, desigur, cu numerele impare, iar principiul feminin cu numerele pare, în mod deosebit în relațiile numerice care apar în determinarea sexului.

[2] Să-l citățm din nou pe pitagoreicul Moderatus din Gades: „Pitagoreicii numesc „Unu" ideea de identitate, de unitate, de egalitate, de concordie și de simpatie în Lume, și „Doi" ideea de altul, discriminare, inegalitate".

[3] Era χύφυ a cărui rețetă ne-a transmis-o Plutarh: miere, vin, stafide, căprișor, rășină, smirnă, lemn de trandafir, seselie, fistic, smoală, obligeană, ștevie, ienupăr, cardamom și mintă, șaisprezece alimente.

[4] Lucian (*Pro lapsu inter salut*) „Pentagrama pe care o adoptau ca simbol inițiații era pentru ei emblema sănătății..." Muzeul din Basel posedă un disc de alabastru din epoca alexandrină (formă pentru prăjituri), având încrustată pentagrama care are în cele cinci vârfuri chiar literele ΥΓΕΙΑ.

[5] Raportul între diagonala pentagonului regulat (latura pentagramei) și latura sa este egal cu raportul Secțiunii de Aur:

$$\varnothing = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618...$$

[6] Lucian în *Le marché des âmes*, Pythagora (către Agorastes): „Vedeți? Ceea ce luați drept zece este un triunghi perfect și jurământul nostru".

CAPITOLUL III

ARMONIA NUMERELOR ȘI A COSMOSULUI ÎN DOCTRINA LUI PYTHAGORAS – CORELAȚIA UNIVERS-TEMPLU-OM – MAREA PIRAMIDĂ – TRIUNGHIUL LUI PYTHAGORAS ȘI TRIUNGHIURILE DIOFANTINE – TRIUNGHIUL LUI PYTHAGORAS TRANSMIS DE CALDEEA ȘI EGIPT EUROPEI NEOLITICE

Părăsind aerul rarefiat al Numerelor Divine pentru domeniul mai practic al numerelor științifice și al aplicării lor în artele frumoase, în mod deosebit în arhitectură, o să dau mai întâi, amintindu-mi fraza lui Confucius despre însemnătatea denumirilor precise[1], o listă a principalelor cuvinte grecești care au legătură cu numărul; aceasta va reaminti, celor care au uitat, cât de subtilă și precisă era gândirea grecească în materie de logică și de matematică.

τὸ ἕν	Unul
πηλίκον	Mărime, cantitate
μέγεθος	Mărime continuă
πλῆθος	Mulțime, multitudine de elemente distincte
Σύμμετρα μεγέθη	mărimi comensurabile
Ἀσύμμετρα "	mărimi incomensurabile
τῶν μετρητῶν	niște comensurabile
τῶν ἀμετρῶν	niște incomensurabile
ποσόν	cuantum
ποσότης ἀριθμός	număr, mulțime numărabilă finită sau combinare de unități
χύμα	șuvoi (de monade), care curge
τὸ ἄπειρον	nedefinitul
τὸ πέρας	finitul, limita
μέρος	parte

λόγος	rațiune, cuvânt, raport, raționament, relație, judecată
ποῖα σχήσις	raport geometric
ποσὴ σχήσις	relație cantitativă (raport aritmetic)
ἀναλογία	proporție geometrică continuă
τὸ ἀναλογον	proporție geometrică disjunctă
χάρις	grația
ἀλήθεια	adevărul
τὸ ὄντως ὄν	ceea ce există cu adevărat
τέλος	țel
φύσις	natura
δύναμις	forță, putere
ἐνέργεια, ἐντελέχεια	acțiune
πρώτη ὕλη	materie primă
εἶδος	formă
αἰτία	cauză
ἐμπειρία	experiență
ἡδονή	plăcere
τὰ φαινόμενα	fenomenele
Οὔσια, sau τὰ ὄντα	realitățile
τὰ μὴ ὄντα	lucrurile care nu există în mod real
Νοῦς	Spiritul-Inteligență
Πνεῦμα	Sufletul Lumii, Suflu
Λόγος	Rațiune
Ἁρμόττειν	A uni, a pune în armonie
εἶδος	Formă
ἰδέα	Idee

Trei nuanțe ale cuvântului a face sau ale ideii de a crea:

πράττειν	A potrivi cu dibăcie
ποιεῖν	A crea
τέχνη	A orândui cu măiestrie, tehnică a artistului sau a meșteșugarului

Noțiunea de Număr care guvernează Universul, introdusă de Pythagoras, a fost reluată de Platon care a fost, așa cum vom vedea în capitolul următor, împreună cu Archytas din Tarent, inițiatorul lui, cel mai important dintre discipolii și urmașii Maestrului din Samos.

Am văzut că la Numerele arhetipuri Platon a mai adăugat Ideile-Forme, numerele fiind, de altfel, reflectate în formele Geometriei. Numărul și Frumusețea erau arhetipurile stăpânitoare (Frumusețea absolută din *Banchetul*), dar Frumusețea însăși și Armonia Cosmosului erau supuse Numărului, care domina atât lumea anorganică, cât și pe cea organică. Al treilea arhetip iubit de Platon, derivat el însuși din Număr, era proporția sau, în sensul cel mai general, Analogia; termenul grecesc pentru proporție este, de astfel, ἀναλογία.

Însuși cuvântul Cosmos, născocit de Pythagoras, care cuprindea în sine ideea unui Univers bine orânduit (prin Numere) și chiar armonios orânduit de către Creator (ὁ τεχνίτης θεός), Dumnezeul cel ce potrivește cu măiestrie și conceptul de armonie împreună cu cel asociat, de simetrie, în sensul antic al cuvântului[2], au dominat nu numai întreaga cosmologie și estetică platoniciene, ci și arhitectura grecească, ale cărei idei călăuzitoare sunt criptic sugerate de Vitruviu (Vitruviu, ca toți arhitecții Antichității, prestase jurământ să nu dezvăluie neiniților tainele artei sale; am văzut că, pesemne, ca toți confrații greci și romani, asimilase îndeajuns din mistica pitagoreică a numerelor pentru a preamări virtuțile numărului Zece, ale Decadei Pure[3]. El a mai stabilit un paralelism aproape riguros între proporțiile templului ideal și cele ale corpului omenesc).

În această estetică pitagoreico-platonică, armonia va fi ori o consecință a euritmiei perfecte obținută din prima clipă, ori o consecință a antagonismului principiilor opuse, rezolvate așa cum în muzică modulația rezolvă disonanțele, la fel cum în teoria proporțiilor Platon se folosește de medietăți (medii proporționale) pentru a acorda cei doi termeni extremi ai unei proporții. Acel Πόλεμος Πατὴρ πάντων[4], al lui Heraclit devine, la rândul său, factor de armonie.

În psihologie și chiar în fiziologie, Platon face să intervină armonia care poate rezolva contradicțiile ce se ivesc uneori în suflet una împotriva celeilalte.

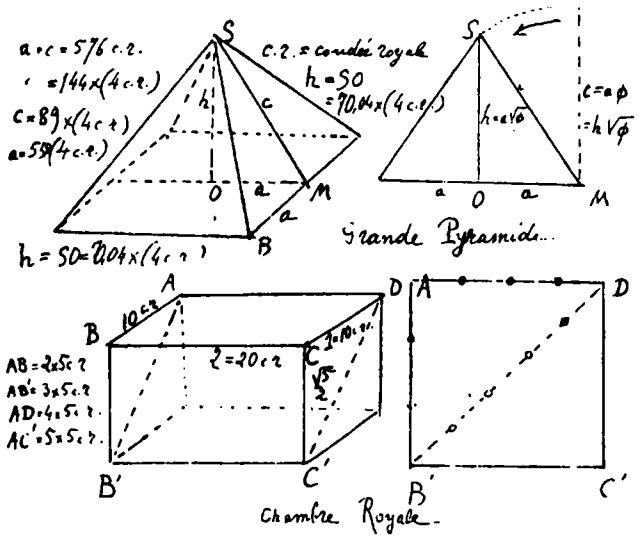
Această noțiune de armonie cosmică, reflectată în acordurile dintre Univers, templu[5] și om, a fost împrumutată, se pare, de Pythagoras de la egipteni în timpul șederii sale printre preoții din Teba sau din Sais.

Lucrările lui M. Varille și ale lui Lubicz despre templele egiptene și simbolistica lor au scos în evidență corelația strânsă dintre proporțiile acestora și cele ale corpului omenesc, totul fiind când subliniat, când învăluit de un simbolism subtil.

Cel mai interesant și mai subtil monument egiptean, ca punere în proporție, este Marea Piramidă sau Piramida lui Keops. Kleppish și Jarolimek au remarcat, cei dintâi, că semitriunghiul meridian al acestei piramide (piramidă regulată cu baza un pătrat și cu patru fețe triunghiulare), triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză și latura mică, jumătate din latura pătratului de bază, sunt, la prima vedere, în raportul riguros al secțiunii de aur, 1,618, pare a rezulta, dacă notăm cu r cotul regal egiptean (0,524 m), dintr-o construcție foarte ingenioasă care pleacă de la a + c (jumătatea laturii pătratului de bază + ipotenuza semitriunghiului meridian) = 144 × 4 r.

Atunci c = 89 × 4r și a = 55 × 4r. Or, 55,89 și 144 sunt 3 termeni consecutivi din șirul lui Fibonacci, șir definit prin recurență cu doi termeni în care raportul dintre doi termeni consecutivi tinde foarte repede către raportul secțiunii de aur $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$ (vezi planșa I).

Șirul lui Fibonacci este 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 89, 144... fiecare termen fiind suma celor două precedente și raporturile termenilor consecutivi fiind:



PLANȘA I

$\frac{3}{2} = 1{,}5$

$\frac{5}{3} = 1{,}66..$

$\frac{8}{5} = 1{,}6$

$\frac{13}{8} = 1{,}625$

$\frac{21}{13} = 1{,}615...$

$\frac{34}{21} = 1{,}619...$

$\frac{55}{34} = 1{,}617...$

$\frac{89}{55} = 1{,}618...$

Vedem că valorile raporturilor consecutive oscilează în jurul valorii ideale $\varnothing = 1{,}618$ și o ating asimptotic foarte repede.

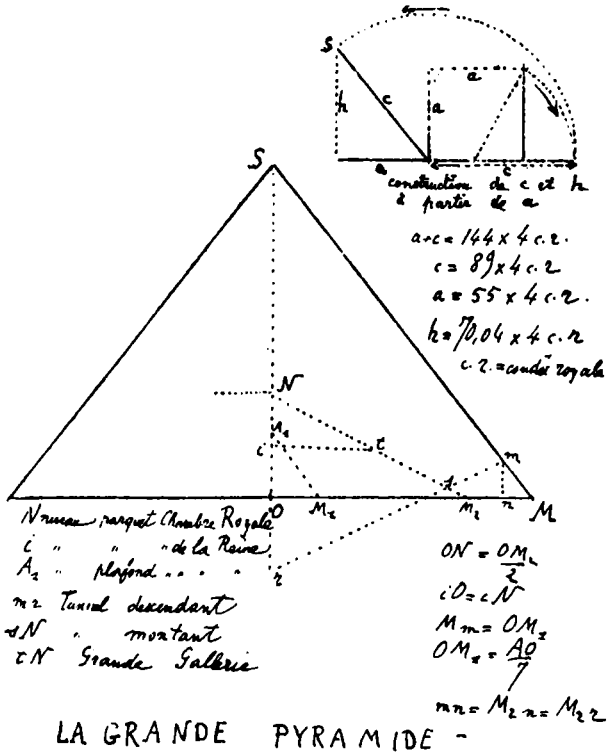
Șirul lui Fibonacci (descoperit de Leonardo din Pisa, Filius Bonacii, în secolul al XIII-lea) tinde astfel asimptotic către șirul $\varnothing$ propriu-zis $1, \varnothing, \varnothing^2, \varnothing^3, \varnothing^4 \ldots \varnothing^n$, cu rația $\varnothing$, în care fiecare termen este egal cu suma celor două precedente, în baza formulei generale $\varnothing^n = \varnothing^{n-1} + \varnothing^{n-2}$ pe care o vom stabili în unul din capitolele următoare. De altfel, tocmai prin aceste aproximații fibonaciene tinde în botanică natura spre secțiunea de aur și spre simetria pentagonală care derivă din ea (numerele 34, 55, 89 se întâlnesc în așezarea semințelor de floarea soarelui). Însă aceasta înseamnă să anticipăm; să ne întoarcem la Marea Piramidă (planșa II).

Înălțimea h a Marii Piramide și a triunghiului meridian cu laturile c, h, a (planșele I și II) este de 146,6 m, aproximativ egală cu $70 \times 4r$ din cauza ciudatei coincidențe.

$$55^2 + 70^2 = 7.925$$
$$\text{și} \quad 89^2 = 7.921$$

Lungimea laturilor pătratului de bază al piramidei ar fi, teoretic, conform acestui sistem:

$$2a = 2 \times 55 \times 4 \times 0{,}524 = 230{,}560 \text{ m}$$



PLANȘA II

Or, ultimile măsurători efectuate la fața locului dau pentru media celor patru laturi ale bazei (cu o diferență de 20 de centimetri între cea mai mare și cea mai mică) 230,634m, cu o diferență de 7 centimetri, inferioară distanței dintre lungimile laturilor.

Avem atunci a = 55 × 4r = 115,28m

c = 89 × 4r = 186,53m

h = 70 × 4r = 146,72 m

Aceasta corespunde cu măsurătorile făcute la Gizeh, iar aproximația astfel obținută de arhitectul Marii Piramide, folosind numerele fibonaciene în locul Secțiunii de Aur riguroase (egiptenii nu

cunoșteau numerele iraționale ca atare), este mai precisă decât fluctuațiile care rezultă din condițiile materiale de măsurare pe sol.

Raporturile din triunghi sunt astfel măsurate încât raportul $\frac{c}{a}$, al ipotenuzei față de latura mică, să fie $\varnothing = 1{,}618$.

$$\frac{c}{h} = \frac{h}{a} = \sqrt{\varnothing} = 1{,}273\ldots$$

Este singurul triunghi dreptunghic de așa natură încât laturile lui să se afle într-o progresie geometrică, tot așa cum triunghiul sacru sau triunghiul dreptunghic al lui Pythagoras, 3, 4, 5, în care $5^2 = 4^2 + 3^2$, este unicul ale cărui laturi se află în progresie aritmetică.

Proporțiile semitriunghiului meridian al Marii Piramide au fost verificate și printr-o măsurătoare unghiulară pe teren care dă 51° 50' pentru unghiul opus laturii mari a unghiului drept; acest rezultat este identic cu unghiul teoretic riguros.

Aproximațiile fibonaciene ale șirului $\varnothing$ se mai găsesc și în templul din Philae (până la $\frac{1}{\varnothing^6}$); în volumul „Camerei Regelui", din Marea Piramidă, ale cărei dimensiuni ideale, proporționale cu 2, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ și 1 (baza este un pătrat dublu, cu diagonala cea mai mare $\frac{5}{2}$) sunt ilustrate practic în figura 2, planșa I.

Lățimea AB = 10r
Lungimea BC = 20r
AB' (diagonala secțiunii) = 3 × 5r
Lungimea BC = 2AB = 4 × 5r
Marea diagonală AC' = 5 × 5r

r fiind și în acest caz chiar cotul regal egiptean. Vom vedea puțin mai departe că triunghiul sacru 3, 4, 5 și cotul regal s-au răspândit până dincolo de hotarele egiptene.

Nu am să descriu aici toate proprietățile matematice ale Marii Piramide și ale Camerei Regale; ele se înlănțuiesc în chip subtil cu geometria icosaedrului înscris în sfera circumscrisă pătratului de bază al piramidei, având drept centru vârful piramidei. Voi mai adăuga doar că tunelul de coborâre către marea galerie este îndreptat, ca o lunetă meridiană permanentă, spre nordul sideral, făcând un unghi de 26° 30' cu orizontul.

Așa cum am mai scris, se pare că arhitectul Marii Piramide nu era conștient de toate proprietățile geometrice pe care le descoperim noi în ea atât de târziu; și totuși aceste însușiri nu sunt întâmplătoare, ci decurg oarecum organic din ideea călăuzitoare cuprinsă în mod conștient în triunghiul meridian. Căci o concepție geometrică sintetică și limpede furnizează întotdeauna un plan regularizator; acesta are originalitatea de a înșira în rigiditatea cristalină și abstractă a Piramidei o pulsație „dinamică", chiar aceea care poate fi socotită drept simbol matematic al creșterii vii.

Aceste aproximații fibonaciene ale triunghiului dreptunghic cu laturile în proporție geometrică de rația $\sqrt{\varnothing}$ și ale triunghiului lui Pythagoras 3-4-5 se mai găsesc într-o serie de edificii egiptene construite mai târziu decât Marea Piramidă. Într-adevăr, egiptenii cunoșteau foarte bine acest triunghi dreptunghic $5^2 = 4^2 + 3^2$ și se foloseau de el pentru a trasa chiar pe sol unghiul drept necesar orientării templelor[6] și obținerii subdiviziunilor schițelor regularizatoare. Pythagoras a fost inițiat în matematică de către preoții din Heliopolis și Sais și desigur tot de la ei a aflat proprietățile triunghiului căruia i-a dat numele său (faimoasa hecatombă corespunzând probabil generalizării proprietății pătratului ipotenuzei pentru toate triunghiurile dreptunghice).

Din cercetările arhitectului cehoslovac Ian Mannesbarth (*Bulletin du Musée de Prague* publicat în 1946) reiese:

1° că triunghiul 3-4-5 ar avea un trecut și mai îndepărtat și ar fi fost împrumutat de egipteni din Caldeea;

2° că din Caldeea și din Egipt au fost răspândite planuri regularizatoare pe acest triunghi nu numai în Grecia miceniană, ci și la populațiile neolitice din mileniul al III-lea î.Hr. (epoca ceramicii cu motive în benzi) și mai târziu în prima perioadă (Hallstadt) a epocii fierului. Curios este faptul că în toate aceste planuri neolitice unitatea de care se foloseau meșterii zidari primitivi este același cot regal egiptean înmulțit cu 8, 9, 10, 12, 15 sau 25. Citez în continuare rezultatul măsurătorilor efectuate la fața locului sau pe planuri de J. Mannesbarth:

1° Mormântul reginei Șubat din Ur în Caldeea (începutul mileniului al III-lea înaintea erei noastre); un triunghi isoscel cu laturile 18A, 15A, 15A (A fiind cotul caldeean), este înscris într-un dreptunghi cu proporția $\frac{3}{2}$; acest triunghi este alcătuit din două

triunghiuri ale lui Pythagoras cu dimensiunile 15A, 12A, 9A, proporționale cu $5, 4, 3$[7].

2° În Egipt, găsim ceva mai târziu mastabaua principală din Gaza stabilită pe trei dreptunghiuri formate fiecare din două triunghiuri dreptunghice 10a, 8a, 6a (a fiind cotul regal egiptean folosit în planul Marii Piramide) adică, din nou proporțiile 5-4-3.

3° În epoca miceniană, găsim în megaronul regal al cetății din Tirint un dreptunghi format din două triunghiuri dreptunghice 15a, 12a, 9a (a este tot cotul regal egiptean) cu aceleași proporții 5-4-3.

4° Mai neașteptată este constatarea faptului că epoca bronzului și începutul epocii fierului în Europa Centrală dovedesc aceeași folosire a acestui triunghi „sacru". De pildă, la Köln-Lindenthal (triunghiurile 15a, 12a, 9a), la Zamky în apropiere de Praga (aici triunghiurile dreptunghice au dimensiunile subtile $12{,}5 \times a$, 10 a, $7{,}5 \times a$; avem $12{,}5^2 = (7{,}5)^2 + 10^2$ sau $156{,}25 = 56{,}25 + 100$; trebuie să împărțim la 2,5 dimensiunile pentru a obține 5-4-3). Să mai citâm fundațiile descoperite prin săpăturile din apropiere de Prerau în Moravia (triunghiuri 15a, 12a, 9a și 10a, 8a, 6a) etc., toate acestea datând din epoca bronzului (mileniul al II-lea î.Hr.), în sfârșit ansamblul de case din epoca fierului (începutul mileniului I î.Hr.) descoperite la Goldberg în Austria (triunghiul lui Pythagoras 30a, 24a, 18a, apoi 25a, 20a, 15a și 20a, 16a, 12a).

Faptul cel mai demn de luat în seamă la toate aceste planuri nu este numai transmiterea în lungul și în latul Europei din ultimul mileniu neolitic a acestui tip de triunghi împrumutat de Egipt din Caldeea, ci îndeosebi folosirea ca unitate, în toate aceste planuri, a cotului regal egiptean; se pare că de sub tradițiile în aparență fanteziste ale francmasonilor operativi și ale companionilor din Evul Mediu s-ar ivi un temei de adevăr cu privire la peregrinările înaintașilor lor.

Întrucât ne-am oprit la triunghiul lui Pythagoras 3-4-5, putem sublinia faptul că el face parte din acea interesantă categorie numită „triunghiuri Diofantine", de la numele lui Diofant din Alexandria. El a dezvăluit profanilor disciplina pitagoreică a Numerelor Figurate și a studiat în mod deosebit grupurile de numere întregi a, b, c, astfel încât $c^2 = a^2 + b^2$, și triunghiurile dreptunghice corespunzătoare.

Există mai multe feluri de a stabili seriile de triunghiuri diofantine. De pildă, orice număr întreg X care se poate așeza sub forma

unui produs de două numere întregi $X = p \times q$, reprezintă una din laturile unghiului drept dintr-un triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză este $z = \frac{p^2+ q^2}{2}$ iar cealaltă latură $y = \frac{p^2 - q^2}{2}$. Într-adevăr,

$$p^2q^2 + \left(\frac{p^2 - q^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{p^2 + q^2}{2}\right)^2 .$$

Acest procedeu oferă pentru o valoare dată a lui X tot atâtea perechi y, z câte cupluri de factori p, q diferite, cu $(p^2 - q^2)$ număr par, putem găsi[8].

O altă metodă constă în a lua un număr întreg impar oarecare n; atunci:

$$n, \frac{n^2 - 1}{2}, \frac{n^2 + 1}{2}$$

sunt, de asemenea, numere diofantine pentru că avem:

$$\left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2 + n^2$$

Luând astfel numerele impare succesive, obținem coloanele:

$$\begin{aligned}
1^2 &= 0^2 + 1^2 \\
5^2 &= 4^2 + 3^2 \\
13^2 &= 12^2 + 5^2 \\
25^2 &= 24^2 + 7^2 \\
41^2 &= 40^2 + 9^2 \\
61^2 &= 60^2 + 11^2 \\
85^2 &= 84^2 + 13^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Coloana laturilor mari ale unghiului drept este un șir 0-4-12-24-40, astfel alcătuit încât diferențele lui prime (diferențele dintre două numere consecutive) formează o serie aritmetică 4, 8, 12, 16, 20, 24 etc. ... cu rația 4. Tot așa stau lucrurile și pentru coloana ipotenuzelor.

Pentru a încheia cu Egiptul, vedem că (fără a menționa vreo disciplină subtilă în aritmetica fracțiilor care nu-și are rostul aici), manipularea numerelor întregi și folosirea în special a șirului lui Fibonaci și a numerelor diofantine i-au permis să ajungă la unele aproximări de raporturi irațională îndeajuns de riguroase pentru a obține cele mai delicate planuri regularizatoare.

Pythagoras a adus din Egipt un *corpus* geometric compact și adaptat la toate nevoile inginerului, arhitectului și sculptorului, de care s-a folosit și el, la rândul său, pentru a pune bazele matematicii occidentale, așa cum au fost codificate de către discipolii săi și de Euclid.

NOTE

[1] „Puneți în ordine denumirile și definițiile, răspunse maestrul. Când denumirile sunt incorecte, raționamentele sunt incoerente; când raționamentele sunt incoerente, treburile merg pe dos; când treburile merg pe dos, uiți să cultivi muzica și riturile, când muzica și riturile sunt uitate, pedepsele sunt disproporționate în plus sau în minus, și atunci poporul nu mai știe încotro s-o apuce, nici ce să mai facă".

[2] Comodulația, acordul dintre proporții, între părțile ansamblului și între fiecare parte și ansamblu.

[3] „Cei vechi socoteau desăvârșit numărul Zece... izvorât din monadă..."

[4] „Conflictul este cauza zămislitoare a toate."

[5] „Acest templu este asemănător cerului în toate proporțiile sale". (Inscripție pe un relief din templul lui Ramses al III-lea, muzeul din Cairo.)

[6] O frânghie cu noduri de 12 unități așezată cu ajutorul a trei țăruși în lungime de 3-4-5 forma unghiul drept; umbra cea mai scurtă a unui țăruș arăta la amiază direcția nord-sud.

[7] Triunghiul 3-4-5 era folosit și de arhitecții asirieni, ahemenizi și mai apoi sasanizi pentru a-și fixa cupolele eliptice.

[8] De pildă X 21 = 3 × 7 dă $29^2 = 21^2 + 20^2$, proporțiile piramidei lui Snofru de la Dashar.

CAPITOLUL IV

VIAȚA ȘI LEGENDA LUI PYTHAGORAS – PLATON ȘI NEOPITAGORISMUL – CEA DE-A VII-A SCRISOARE A LUI PLATON

Αὐτὸς ἔφα
(El însuși a spus-o)

Numele lui Pythagoras a apărut de mai multe ori în primele capitole ale acestei cărți consacrate Numărului, fapt cu totul firesc, întrucât dintre toți filosofii din Occident el a acordat cea mai mare însemnătate acestui concept. Cuvintele sale „Totul este rânduit după Număr", deja citate, au fost riguros verificate după 2500 de ani; după cum a scris Bertrand Russell, matematician și filosof, și unul dintre întemeietorii logisticii: „Cel mai uimitor lucru în știința modernă este întoarcerea sa la pitagorism."

Și prin știință înțelegem aici matematica pură, fizică și chimie. Vom vedea că „Numerele Divine" ale pitagoricianului Nicomachos din Gerasa se asemănau în mod ciudat cu numerele „clase de clase" ale lui Bertrand Russell și Whitehead; dacă nu a fost înfăptuită în domeniul psihologic sau sociologic, armonia Cosmosului postulată de maestrul din Samos și de discipolii săi pare că există cel puțin la scară siderală, sugerând, după cum arată Eddington, fie inteligența creatoare de armonie a unui Dumnezeu sau a unui demiurg, fie o armonie conformă de altfel cu teoria grupurilor, care s-ar găsi ca un dat *a priori* în intelectul uman.

Legenda lui Pythagoras a fost ridicată în slăvi și înflorită cu atâtea adaosuri, numele său asociat cu atâtea inițiative și creații concrete, cu atâtea credințe mistice și intervenții supranaturale, încât este cu totul firesc să ne întrebăm dacă în spatele acestei legende se află un adevăr istoric, dacă acest personaj, taumaturg, matematician și reformator politic, a existat cu adevărat. Răspunsul, din fericire

pentru amatorii de figuri de eroi, este afirmativ; viața lui Pythagoras din istorie poate fi desprinsă de legenda cristalizată în jurul numelui său, și se ivește din ea o personalitate tot atât de puternică și de însemnată în evoluția umanității, îndeosebi a umanității occidentale, cum au fost iluștri săi contemporani Buddha, Confucius, Lao-zi și Zoroastru. În dezvoltarea etică și culturală a vechii Asii ei înșiși plutind între istorie și legendă.

Voi înfățișa pe scurt, în continuare, ceea ce știm despre viața lui Pythagoras; sunt ajutat în acest demers de lucrările recente ale lui Mario Meunier, Carcopino, F. Cumont, G. Méautis, A. Delatte, care au confirmat autenticitatea multor amănunte ajunse până la noi prin tradiție.

Pythagoras s-a născut la Samos între 592–572 î.Hr. (este în general acceptat anul 580), iar într-o tradiție autentică referitoare la anii de tinerețe îl găsim adolescent cu plete lungi la jocurile celei de-a 48-a Olimpiade, câștigând la pugilat, împotriva „greilor" adulți, neprețuita ramură de măslin. Pleacă apoi într-o lungă călătorie pentru a se iniția pe rând în științele și filosofiile din cele mai cultivate centre ale vremii; șederea în Egipt este confirmată de toate izvoarele și de anumite particularități ale învățăturii lui. Aici a fost fără îndoială inițiat în misterele (la Memfis, Sais, Heliopolis) și în geometria egipteană. Șederea în Caldeea (se pare că Pythagoras a fost luat prizonier în timpul cuceririi Egiptului de către Cambise și dus la Babilon unde ar fi primit învățătura Magilor) este posibilă dar nedovedită, la fel retragerea în Fenicia (muntele Carmel). Șederea în Tracia, printre adepții riturilor orfice, este foarte probabilă, întrucât ritualul misterelor orfice și cel al sectei pitagoreice, ca și simbolismul lor, au multe elemente analoage sau chiar identice. Dimpotrivă, șederea în India pare să aparțină întru totul legendei, iar afinitățile dintre dogmele vedice și anumite credințe pitagoreice se explică prin prezența în Egipt (menționată deja de Herodot) a înțelepților hinduși („gimnosofiști", strămoșii yoghinilor de astăzi).

Sigur este faptul că din aceste călătorii s-a întors deja bărbat, în puterea vârstei (la 56 de ani, precizează Iamblichos, autor al celei mai complete Vieți a lui Pythagoras, redactată în secolul al IV-lea A.D.), la Samos unde succesul lecțiilor sale i-a atras nu numai o mulțime tot mai mare de adepți, ci și invidia și dușmănia tiranului Polycrates, care l-a silit să se exileze, de această dată pentru totdeauna; drept urmare ajunge la Crotona și se stabilește în

Magna Graecia. Și aici strălucirea personalității și învățăturii sale: etica idealistă și doctrina științifică riguroasă (în care sunt cuprinse studiile numerelor figurate, ale proporțiilor, al celor cinci corpuri regulate și, mister păstrat în mare taină departe de profani, secretul numerelor iraționale) i-a adus o sumedenie de discipoli. Doctrina religioasă, etica și „Teoria Numerelor" erau, după cum subliniază Platon în Scrisoarea a VII-a, legate prin „formule-cheie", prin principii generale și relații „invariante" care se aplicau acestor trei domenii. În ciuda aparentei asprimi a cuvintelor: „Totul este rânduit după Număr", religia lui Pythagoras proclamă o etică întru totul idealistă (aceeași tendință marchează faptul că fizica matematică modernă are drept rezultat „mentalismul" idealist antimaterialist al lui Eddington, James, Jeans, Max Planck, Weyl) întemeiată îndeosebi pe caritate și iubire, Iubirea Divină, ea însăși consecință a iubirii și prieteniei pentru făpturi așa cum este definită în *Banchetul* de Platon.

Din Haos, prin creație și alegere ordonată de către „Dumnezeu rânduind cu măiestrie" (sau „Supremul făuritor"), se naște ordinea (Cosmosul este Universul ordonat), ordinea devine Armonie, percepută ca Armonie consonantă de ritmurile sufletului bine acordat. În biografia lui Pythagoras, de Heraclid Ponticul (fragment citat de Clement din Alexandria, *Stromata*), se spune că:

„Pythagoras așeza fericirea (literal: *eudaimonia* sufletului) în contemplarea ritmului Universului (literal: în desăvârșirea dirijată a numerelor τῆς τελεότητος τῶν ἀριθμῶν)".

Am văzut mai înainte că sincronismul între ritmurile sufletului individual „bine acordat" și cele ale Sufletului Universal este specificat de Platon (*Timaios*) cu aceste cuvinte:

„Apoi, în acest corp în care năvălește și din care se scurge un șuvoi (viața) necurmat, ei (zeii) fac să intre mișcările periodice ale Sufletului Universal..."

Rolul regularizator, purificator, al muzicii este, de asemenea, subliniat de Platon:

„Căci armonia ale cărei unduiri sunt de același fel cu mișcările regulate ale sufletului nostru nu-i apare în nici un chip omului care are legături cu Muzele ca bună doar să-i procure o plăcere irațională ... Dimpotrivă, Muzele ne-au dat-o să-i fie aliată sufletului nostru când începe să pună în ordine și în acord mișcările sale periodice care s-au dereglat în noi..."

Aceeași ambiție de a pune în acord ritmul individual cu cel al Universului, ambiție pe care Platon a luat-o direct de la pitagorism, este exprimată în termeni aproape identici în ideologia și practica sectei budiste contemplative Zen în care devine o mistică a Frumuseții în natură și în artă, estetism totodată auster și rafinat care a înrâurit întreaga artă din marile epoci japoneze, ca și ritualul „Ceremoniei ceaiului".

Estetica și filosofia lui Platon erau, de altfel, dominate de supremația Numărului și a slujnicei lui, Geometria; este cunoscută butada:

„Până și Zeul geometrizează"
'Αεί γεωμετρεῖν τὸν Θεόν

și interdicția, pentru „negeometri", de trece pragul Academiei sale:

Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην[1].

Vom vedea mai departe că nu este vorba aici de o întâlnire întâmplătoare de idei între Pythagoras și Platon, ci de o influență preponderentă în filosofia cu nenumărate fațete a acestuia din urmă. Ba chiar se străduiește, într-un divertisment matematic din *Timaios*, să stabilească un rebus a cărui cheie nu a fost descoperită decât la începutul secolului al XIX-lea, de a calcula ceea ce el numește „Numărul Sufletului Lumii", de fapt o gamă cu 35 de note, plecând de la cele două progresii geometrice, 1, 2, 4, 8 și 1, 3, 9, 27, ale căror intervale le completează cu medii aritmetice și armonice pentru a obține șirul

$$1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{27}{6}, \frac{243}{128}, 2, \ldots 27 .$$

(Cer iertare de a fi anticipat aici teoria proporțiilor și concepția platoniciană a „medietăților").

În afara acestei doctrine a Armoniei, doctrina religioasă a lui Pythagoras (căci Filosofia sa era o religie completă împreună cu etica, riturile, disciplina sa) admitea că sufletele sunt supuse unor reîncarnări succesive până la eliberarea acelora care s-au arătat demne de acest lucru în timpul palingenezei (metempsihoză, succesiune a ciclului vieții); ele devin atunci „daimones", „genii" semidivine care nu se mai întorc în lumea noastră decât ca o apariție luminoasă (Zoroastru, Buddha, Pythagoras), dar se regăsesc în grădinile stelare ale preafericiților, „dincolo de Calea Lactee".

(Acest aspect al pitagorismului pare a sugera o legătură cu hinduismul.)

Calea Lactee este deseori întâlnită în miturile pitagoreice referitoare la viața de după moarte. Pe una dintre plăcuțele funerare din Ihurium, Carcopino nota inscripția geamănă, „parolă și răspuns":

„Iedule am căzut în lapte."
„Iedule ai căzut în lapte."

Și, corespondență simbolică, pe una dintre stucaturile din Bazilica pitagoreică de la Porte Maggiore din Roma, o bacantă întinde un ied (sufletul) către sânul dezgolit al alteia, care e gata să-l alăpteze.

Această bazilică, descoperită în urma prăbușirii, la 24 aprilie 1914, a unei porțiuni de balast de sub șinele căii ferate care duce de la Roma la Neapole, aproape de Porte Maggiore, a fost identificată de Cumont și Carcopino drept o lojă sau „peșteră" pitagoreică; este singurul exemplu de templu pitagoreic care a ajuns până la noi și ne-a dezvăluit în frumoasele sale stucaturi neatinse câteva lămuriri privind simbolurile sectei. Porphyrios și Jamblichos ne relatează că la Samos Pythagoras își amenajase drept „casă pentru Filosofie" o peșteră, simbol al lumii aparențelor ca și a întemnițării corpului, originea și a frumosului mit al peșterii lui Platon după Pophyrios (*De Antro Nympharum*).

O altă stucatură din această bazilică de la Porte Maggiore reprezintă o femeie tânără cu o liră în mână, care se aruncă în valuri de pe o stâncă, sub privirile lui Eros; o sirenă pare că o așteaptă pentru a o primi și a o duce spre o insulă unde tronează un zeu solar. Cumont vede în asta o alegorie a sufletului omenesc care, îmboldit de Iubire și ținând în mână heptacordul vibrând de armonia lumii, nu se teme să înfrunte încercarea trecătoare a Morții pentru a regăsi, dincolo de tiparele materiei nedesăvârșite, revelația divină (Apollon este din întâmplare Zeul sau mai degrabă arhetipul divin a lui Pythagoras).

Pliniu (într-un text găsit de Carcopino)spune lămurit că pitagoreicii își însușiseră legenda aruncării lui Sapho în mare de pe stânca Leucadelor pentru a face din ea un simbol al „saltului" și al eliberării sufletului în Moarte. După cum subliniază Carcopino, bazilica oferă și dovada vitalității religiei pitagoreice la Roma, la începutul erei creștine.

Să ne întoarcem la biografia lui Pythagoras. Venirea lui la Crotona este plasată în anul 529 î.Hr. de către Aristoxenos din Tarent. Succesul învățăturii sale filosofice și matematice în Calabria și mai apoi în Sicilia este atât de mare încât numărul adepților săi sporește neîncetat. Iacomachos și Iamblichos amintesc un măreț discurs al maestrului care a avut drept urmare întemeierea Societății sau „Fraternității" pitagoreice (acest discurs oferă pesemne substanța pentru „Hieros Logos", turnată în versuri ionice de către discipolii apropiați și de fiul lui Pythagoras); membri societății făgăduiau să-și pună laolaltă bunurile și, meditând la noua revelație (sau „filosofie", termen născocit de Pythagoras), să tindă către înfăptuirea, prin cunoaștere și iubire, a armoniei interioare, în acord cu Marea Armonie. Ceea ce deosebește pitagorismul de celelalte etici întemeiate pe armonie este faptul că singura cale de a ajunge la cunoașterea indispensabilă, sau „gnoză", este baza sa matematică, taine păstrate cu strășnicie la care numai inițiații de gradul al doilea puteau năzui. Societatea pitagoreică devenise treptat o fraternitate secretă inițiatică, modelul de mai târziu al mai tuturor societăților secrete. Un noviciat de trei ani (stagiu exoteric sau politic, sau acusmatic) preceda admiterea în primul grad (nomoteți). Doar celor din al doilea grad (matematicienii) le era îngăduit să-l vadă pe Maestru (celor din primul grad le era îngăduit să-l audă).

Succesul molipsitor al doctrinei și eticii pitagoreice a dus la transformarea rapidă a sectei din contemplativă în activă; savanții și idealiștii puri deveniți oameni politici au luat treptat puterea și au exercitat-o cu succes asupra celei mai întinse părți din Magna Graecia sub forma unei federații de cetăți numită „Liga crotoniată". Moartea Maestrului, întâmplată în jurul anului 500 î.Hr., a dus la slăbirea hegemoniei societății, iar disensiunile și intrigile care au urmat au pregătit terenul pentru o revoluție demagogică; cetățenii din Federație se săturaseră să tot fie cârmuiți armonios de savanți, înțelepți și oameni ai dreptății și tânjeau după un regim de politicieni mai pe placul lor, chiar de-ar fi fost aceștia mediocri sau corupți. Cetățile Ligii au căzut pe rând în mâinile celor nemulțumiți și în cele din urmă conducătorii Confreriei au pierit într-un mare măcel (incendiul de la Metapont) în jurul anului 450 î.Hr. Doar Lysis și Philolaos au izbutit să scape împreună cu câțiva novici, printre care pesemne Hippocrates din Chios care s-a stabilit la Atena, Hiparchos și Hippasos, toți trei rămași cunoscuți pentru faptul că, divulgând

mulțimii anumite secrete matematice tăinuite, au fost excomunicați de către celulele Confreriei reconstituite, la câtăva vreme după catastrofă, în Sicilia și în Calabria. Membrii săi au renunțat la activitatea politică cu excepția strălucită a lui Archytas din Tarent. Dar activitățile științifice și etice, studiile matematice, întrajutorarea, mereu sub pecetea tainei, au fost menținute.

Legea tăcerii și a secretului constituiau, împreună cu puritatea inimii și curățenia corpului, esența regulii neopitagoreice, taină pecetluită de un jurământ. Pe vremea când se aflau la Crotona, activitatea politică a novicilor și a nomoteților suspendase în mod firesc jurământul de tăcere, atunci când lucrau în afara Confreriei. Jurământul de păstrare a secretului se depunea pe simbolul figurat al Decadei, „sfântul" Tetraktys; Iamblichos ne-a păstrat formula citată mai înainte: „Nu, jur pe cel care a transmis sufletului nostru Tetraktys-ul în care se găsesc izvorul și rădăcina veșnicei naturi!"

Vom afla în continuare secretele matematice ale Confreriei; în ritualul secretului și al tăcerii se găsește înglobat chiar numele Maestrului; nu aveai voie să-l rostești, era numit: „Acela, Nemuritorul, Geniul, Divinul". Cuvintele Αὐτὸς ἔφα (El însuși a spus-o) rostite de acusmatici au rămas celebre. Chiar Herodot, în secolul următor morții lui Pythagoras, îl numește cu respect: „Cel pe care nu îl voi numi".

Legea întrajutorării, cultul prieteniei care îi era asociat, respectul pentru familie, supunerea față de legi când erau drepte, cultul eroilor, făceau parte din etica pitagoreică. Plutarh (care a readus la modă eroismul) și Iamblichos ne-au transmis o sumedenie de anecdote despre tradițiile pitagoreice rămase vii chiar pe vremea Romei Imperiale, în ciuda neplăcerii cu care, de la Cezar, autoritățile priviseră societățile secrete, și chiar „Colegiile" de meșteșugari (în schimb, Roma republicană îi ridicase în forum o statuie lui Pythagoras).

Ritualul pitagoreic impunea o curățenie minuțioasă a corpului și a veșmintelor (togă din in alb), cuprindea examenul zilnic de conștiință, folosirea parfumurilor (și a unei tămâi speciale) și a muzicii pentru a pune în armonie ritmurile sufletului cu cele ale corpului, cina comună unde era consumată numai carnea albă a animalelor admise pentru jertfele rituale:cocoși albi, purcei și iezi de lapte. Muzica, după cum vom vedea, juca un rol însemnat în Confrerie, atât ca știință asociată matematicii proporțiilor, cât și ca practică. Disciplinele matematice cele mai importante predate inițiaților erau, în afara teoriei proporțiilor (corespunzând celei a intervalelor

muzicale), studiul celor cinci corpuri solide regulate (numite mai târziu platoniciene) și al construcțiilor geometrice înrudite, teoria numerelor figurate, în sfârșit „secretul iraționalului", al existenței numerelor iraționale și al folosirii lor. Contrar părerii adoptate în general, pitagoreicii nu căutau să nege existența numerelor iraționale, dar, recunoscând corelația între anumite numere iraționale și simbolurile geometrice care alcătuiau însuși nucleul simbolisticii lor secrete (pentagrama și dodecaedrul, a căror construcție riguroasă este întemeiată pe folosirea Secțiunii de Aur), ei păstrau cu strășnicie secretul construcțiilor aferente. Tocmai pentru că le-au divulgat pe acestea (construirea pentagonului și a dodecaedrului) Hippocrates din Chios și Hippasos din Metapont au fost excomunicați din Confreria reconstituită.

Într-o altă lucrare (*Numărul de Aur*), am vorbit pe larg despre reîntemeierea pitagorismului primitiv și despre succesul neopitagorismului la Roma și la Alexandria; acum vreau numai să completez schița înfățișată aici arătând rolul lui Platon în revelarea și dezvoltarea matematicii Școlii. Am vrut să demonstrez, în *Numărul de Aur*, bazându-mă pe dialogurile pitagorizante (*Timaios, Philebos, Theaitetos, Banchetul*) și pe *Scrisoarea a VII-a*, că Platon a fost un pitagoreici deplin inițiat, îndeosebi în matematica sectei (care, deși puțin cunoscută de profani, nu mai era secretă)și că aprofundase el însuși teoria proporțiilor și pe aceea a celor cinci solide regulate numite platoniciene din pricina interesului pe care l-a arătat acestora. Teoria mea nu aduce nimic nou întrucât ea datează de pe vremea lui Cicero, care și el, precum Caton cenzorul, Varron și Seneca, era pitagorizant, dacă nu pitagoreic.

Scrisoarea a VII-a a lui Platon, recunoscută acum drept autentică de către cei mai importanți specialiști în exegeza platoniciană, este unul dintre cele mai frumoase și mai mișcătoare documente din istoria ideilor și a simțămintelor omenești. Am vorbit mai înainte despre rolul prieteniei în etica pitagoreică; forma aceasta de prietenie era un sentiment de camaraderie afectuoasă, intermediară între prietenie și iubire (cea din *Banchetul*), pentru care chiar jertfirea vieții pentru un prieten este un lucru firesc. Platon însuși a fost încercat în timpul vieții de două asemenea simțăminte, cel dintâi fiind, la începutul formării sale intelectuale, adorația respectuoasă pentru Socrate, maestrul său, celălalt, în amurgul vârstei, afecțiunea pentru Dion din Siracuza, cumnat al tiranului Dionysos cel Bătrân, unchiul lui Dionysos cel Tânăr la care Platon a fost de două ori în

vizită gândind să-l convertească la concepția pitagoreică despre îndatoririle suveranului. Curtea din Siracuza este, pe de altă parte, amestecată direct în inițiativa lui Platon, căci, după o tradiție culeasă de Diogenes Laertios și care pare dovedită, Philolaos, unul dintre conducătorii Confreriei scăpați din măcelul de la Metapont, ar fi dezvăluit în scrisorile sale nu numai secrete filosofice și matematice, dar, ispitit de imensa sumă oferită, ar fi vândut lui Dionysos cel Bătrân (cumnatul lui Dion) trei cărți care cuprindeau esența doctrinei secrete a sectei. Studiul acestor texte, înlesnit de amicul său Dion, apoi legătura de prietenie cu Archytas din Tarent, ar fi dus la convertirea definitivă a lui Platon la pitagorism.

De altfel, este și părerea lui Gomperz (*Platon's Selbstbiographie*) că *Scrisoarea a VII-a* dă cheia vieții și operei lui Platon; cei doi poli tragici ai vieții sale sufletești, moartea crudă și sublimă a lui Socrate și omorârea lui Dion, întâmplată în toiul neînțelegerii (scrisoarea este adresată urmașilor lui Dion), sunt evocați aici în cuvinte mișcătoare.

Archytas din Tarent, de șapte ori generalisim și regent al Tarentului, care întemeiase în această cetate un stat pitagoreic prosper, și care cunoscuse pe Philolaos, s-a aflat între gândirea pitagoreică inițială autentică și Platon; Tarent a fost pentru acesta din urmă încarnarea cetății ideale guvernată de filosofi matematicieni (vezi *Republica*), iar numele lui Archytas, tot atât de mare matematician pe cât a fost om de stat și conducător militar, este întâlnit de mai multe ori în *Scrisoarea a VII-a*.

Dionysos cel Tânăr, care îi luase locul tatălui său ca tiran, l-a invitat pe Platon să se întoarcă la Siracuza întrucât, zicea el, se împrietenise acum cu „Archytas și cu cei din Tarent", tânărul tiran trimite într-o corabie de război pe Archedemos, „din cercul intim al lui Archytas", și o scrisoare „de la Archytas și cei din Tarent", care adeverea proaspătul zel al tiranului în căutarea adevărului; cei care fac invitația trag nădejde că recenta prietenie înfiripată între Tarent și Siracuza nu va fi compromisă de un refuz al lui Platon. Acesta cedează în interesul lui Dion „și al prietenilor și Fraților întru Doctrină"; el arată că „prietenii lui Archytas" (pitagoreicii) l-au îndemnat să întreprindă această a treia călătorie în Sicilia „nădăjduind să fiu folositor filosofiei și prietenilor mei". La acea vreme Dion era certat cu nepotul său și exilat din Sicilia, fapt ce explică osteneala pe care și-o dă Platon pentru a-și îndreptăți călătoria și prezența la curtea tânărului Dionysos. A băgat curând de seamă că acestuia nici

prin gând nu-i trecea să ducă viața plictisitoare a unui inițiat și să reformeze guvernarea din Siracuza, și, simțindu-se chiar în primejdie de moarte, a trimis un mesaj „lui Archytas și celorlalți prieteni din Tarent". Archytas trimite îndată o galeră de război cu cincizeci de vâsle și cu ambasadorul extraordinar Lamiskos, care cere punerea în libertate a lui Platon. Acesta se îmbarcă și părăsește Siracuza, de data aceasta pentru totdeauna. Referirile la filosofia propovăduită de „Archytas și prietenii săi", adică la pitagorism, sunt în același timp discrete și bătătoare la ochi: „Ceea ce știu este că și alții au putut scrie despre asemenea lucruri, dar care anume sunt autorii adevărați n-o știu nici ei. Atât aș avea de spus cu privire la cele ce s-au scris sau se vor mai scrie de către toți cei ce spun că știu lucrurile ce mă frământă pe mine, fie că m-au ascultat pe mine însumi rostindu-le, fie că au ascultat pe alții ori le-au aflat ei înșiși; că în ce-i privește pe toți aceștia, nici unul nu înțelege, după părerea mea, despre ce e vorba. Bineînțeles că nu există vreo lucrare de a mea pe această temă și nici nu va exista vreodată; căci nu e de fel ceva de pus în vorbe, ca alte învățături, ci doar printr-o lungă experiență a lucrului acestuia și printr-o conviețuire cu el se poate întâmpla ca dintr-o dată, țâșnind ca din foc, să se înalțe o lumină, care, o dată ivită în suflet, se hrănește din ea însăși."

Și, imediat, pasajul următor:

„Nu încape nici o primejdie să uiți așa ceva, o dată ce ai prins lucrurile cu mintea, ele concentrându-se în tot ce poate fi mai scurt... doar o mână de oameni știu de așa ceva."

Ne duce gândul la fragmentele din *Hieros Logos*, ca principiu de analogie (Natura mereu asemănătoare sieși).

În ciuda discreției sale astfel subliniată, în dialogurile pitagoreice Platon ne dezvăluie câteva fragmente din matematica pitagoreică (care de altfel nu mai era secretă, cel puțin în linii mari), îndeosebi cele care tratau despre Teoria proporțiilor, despre teoria gamelor, despre cele cinci solide regulate; dar nu dă nici o explicație atunci când menționează că dodecaedrul i-a servit Zeului ordonator drept model pentru armonia Cosmosului; de-abia în secolul al XVI-lea a găsit Luca Pacioli cheia acestei enigme. Celor care ar fi interesați să afle amănunte mai precise despre organizarea Confreriei pitagoreice și despre influența neopitagorismului în Roma Republicană apoi Imperială, și în Alexandria, le recomand încă o dată lucrările lui Delatte, Carcopino și Méautis, precum și cartea mea *Numărul de*

Aur (vol II, *Riturile*). Înainte să închei acest capitol mai curând biografic, în care Numărul nu apare decât în treacăt, mai doresc să lămuresc legenda, știută deja în lumea elenistică, conform căreia după ce și-au stabilit Filosofia Numărului luând în considerare numerele întregi, pitagoricienii ar fi rămas consternați descoperind existența lui $\sqrt{2}$ și a celorlalte numere iraționale. Adevărul pare să fie că, dimpotrivă, nucleul doctrinei lor a fost stabilit pe baza geometriei lungimilor iraționale, marile lor secrete fiind construirea pentagonului regulat și a dodecaedrului[2], acestea provenind și ele din cea a Secțiunii de Aur. În legătură cu cartea a IV-a a lui Euclid, în care este prezentată construirea pentagonului regulat prin intermediul „mediei și extremei rații" (nume dat de Euclid Secțiunii de Aur), un scoliast scrie: „Această carte este în întregime descoperirea pitagoreicilor."

Pentagrama (pentagonul regulat în formă de stea) care furnizează un șir de proporții de aur era, după cum știm de la Lucian, parola și simbolul cel mai însemnat a membrilor confreriei; această proporție din Secțiunea de Aur care domină cele mai însemnate trei figuri geometrice ale misticii pitagoreice, pentagonul, pentagrama și dodecaedrul este exprimată de numărul irațional $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$

În capitolele următoare vom prezenta disciplina pitagoreică a Numerelor Figurate și Secțiunea de Aur.

Cer iertare pentru că în acest capitol am lăsat să treacă biografia și istoria înaintea matematicii propriu-zise, care părea că trebuie să ofere substanță acestei cărți; dar dezvoltarea de mai târziu a Teoriei Numerelor nu poate fi bine înțeleasă fără oarecare familiarizare cu viața și gândirea celor doi mari filosofi ai Numărului, Pythagoras și Platon.

Cititorul ar putea crede că am făcut în așa fel încât să exagerez pitagorismul lui Platon; voi cita în continuare două pasaje din expunerea cărții *Plato's Theory of Ideas*, de Sir David Ross apărută în revista *Studies* publicată la Dublin de Părinții Ieziuiți (Oxford University Press, 1951):

„Sir David Ross susține că Platon s-a interesat din ce în ce mai mult de matematică (către sfârșitul vieții) și că abia atunci și nu mai devreme – după cum susținuseră Taylor și Burnet – a suferit influența pitagoreică. După Aristotel, Platon a socotit atunci ideile ca

Numere și a gândit că elementele Ideilor erau elementele tuturor lucrurilor, – fapt ce poate însemna doar că își închipuia că la baza universului stătea o structură bine proporționată.

Ca adaos la această strânsă asociere între Idei și Numere în ultima fază a teoriei sale „ideale", Platon a introdus alte entități spațiale, pe care Aristotel le menționează în trei pasaje sub denumirea de „lucruri de după numere". El vorbește despre „linii, planuri și solide care vin după numere" (numerele figurate). S-ar părea că, recunoscând o clasă de Idei ca fiind Numere, „a recunoscut, de asemenea, un grup secundar de Idei asociat geometriei și cuprinzând în esență o referire la extensiunea spațială." (Această expunere este datorată Părintelui Reverend John Murray, S.J.).

NOTE

[1] Uneori dat ca: ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω.

[2] Iamblichos (*Vita Pit.*) scrie: „Hippasos era unul dintre pitagoreici, întrucât a fost primul care a publicat construirea sferei cu 12 pentagoane (dodecaedrul), a pierit într-un naufragiu din cauza acestei nelegiuiri, dar a primit creditul moral al acestei descoperiri când, de fapt, îi era pe drept datorată lui (Pythagoras)". Proclus îi atribuie lui Pythagoras construirea celor cinci corpuri regulate (τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν).

CAPITOLUL V

GÂNDIREA OCCIDENTALĂ ȘI PRINCIPIUL ANALOGIEI – PROPORȚIA, REFLECTARE MATEMATICĂ A ANALOGIEI – TEORIA PITAGOREICĂ A PROPORȚIILOR – SECȚIUNEA DE AUR – „SYMMETRIA" LUI VITRUVIU ȘI PRINCIPIUL ANALOGIEI AL LUI THIERSCH

Ce ți-e și cu diavolul analogiei abstracte!
De-ați ști cum mă chinuie câteodată!
(Paul VALÉRY, Monsieur Teste)

Poate că cea mai importantă dintre formulele scurte și secrete pe care le amintește Platon în *Scrisoarea a VII-a*, formule publicate câteva secole după moartea lui Pythagoras, este, după „Totul este rânduit după Număr", Principiul analogiei formulat de Maestru în acești termeni:

Γνώσῃ δ'ᾗ θέμις ἐσεί, φύσιν περὶ παντὸς ὁμοίην

adică:

„Vei cunoaște, atât cât este cu putință pentru un muritor, că Natura este în totul asemănătoare sieși".

Ecoul acestor cuvinte răsună încă în „Pădurea simbolurilor" de Baudelaire și în „Demonul analogie" de Mallarmé; principiul este reflectat de-a lungul dezvoltării științei, filosofiei, magiei (cer iertare că o amintesc aici, dar a avut un rol însemnat în transmiterea simbolurilor antice și a principiului despre care este vorba), în sfârșit al artelor din Occident, incluzând arhitectura grecească, apoi pe cea gotică și chiar literatura (metafora este condensarea eliptică a unei analogii). Să nu uităm muzica și modulațiile sale.

Ca să începem cu ceea ce în acest domeniu are legătură cu numerele, vom stabili mai întâi de toate că proporția, în general, este o echivalență sau o egalitate analogică. Noțiunea de *raport* o precedă logic pe cea de proporție al cărei element este; îmi iau îngăduința să dau câteva definiții preliminare folositoare expunerii care urmează.

Raportul aritmetic, comparație a două mărimi măsurabile, este un caz particular al judecății, al operației-tip a inteligenței; la rândul său aceasta este:

1° percepția unei relații funcționale sau a unei ierarhii de valori între două obiecte ale cunoașterii;

2° discernerea sau comparația valorilor, calitativă sau cantitativă. Când această comparație ajunge la o evaluare cantitativă netă, rezultatul este un *raport* care are forma unei fracții aritmetice sau algebrice, $\frac{a}{b}$, și toate proprietățile unei fracții. De exemplu, el este echivalent cu câtul dintre a și b, adică cu un *număr*.

Proporția, conform definiției lui Euclid, este „echivalența a două raporturi", relația analogică între două comparații; când această echivalență este egalitatea a două raporturi algebrice, avem $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ sau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dacă a, b, c, d sunt numerele care măsoară mărimile A, B, C, D, cu aceeași unitate. Ceea ce se poate enunța astfel:

A este pentru B cum este C pentru D, expresie care arată îndată relația între această egalitate și principiul analogiei. De altfel, după cum arată deja Vitruviu, proporția geometrică se numește în limba greacă ἀναλογία, analogie. Când doi termeni (termenii intermediari) sunt egali, obținem proporția geometrică continuă $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$; b fiind media (medietatea) geometrică între cei doi extremi. Ideea de medietate sau legătură armonică între două elemente ale unei formule sau ale gândirii joacă un rol cu totul deosebit la Platon (vezi definiția dată de el proporției în *Timaios*: „dar e cu neputință să combini cum trebuie două lucruri fără un al treilea: trebuie între ele o legătură care să le unească").

O proporție geometrică poate avea un număr oarecare de termeni:

proporție discontinuă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ ... etc.

proporție continuă $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$ ... etc.

După cum vedem este vorba întotdeauna de permanență, de *invarianța* unui raport caracteristic. Grecii preferau să pună proporția

continuă sub formă de progresie geometrică a, b, e, d, e etc. (la fel cu 1, 2, 4, 8, 16 etc.).

Pitagoreicii nu s-au mărginit la studiul proporției geometrice. În domeniul raportului ei stabiliseră deja zece tipuri de raporturi începând cu raportul $\frac{a}{b}$, care era „compus" în $\frac{a+b}{b}$

„despărțit" în $\frac{a-b}{b}$

„convertit" în $\frac{a}{a-b}$.

Iată, cu titlu informativ, numele acestor raporturi tip:

1° Multiplu.

2° Supraparticular, având la numărător întregul plus o parte din întreg, ca de exemplu:
sescvialter (are la numărător în plus jumătate din numitor), $\frac{12}{8}, \frac{3}{2}$ (cvinta);
sescviterțian (o treime în plus), $\frac{8}{6}, \frac{4}{3}$ (cvarta) etc.;
$\frac{n+1}{n}$ face parte din acest tip general.

3° Suprabipartit $\frac{5}{3}$ (3 + 2 părți);
Supratripartit $\frac{7}{4}$ (4 + 3 părți).

4° Multiplu supraparticular, cuprinde: dublu sescvialter (conține la numărător de două ori numitorul plus jumătate);
Triplu sescvialter etc.

5° Multiplu suprapartit.
Și cele cinci inverse: submultiplii etc.

Pitagoreicii din Sicilia stabiliseră deja cele mai importante trei tipuri de proporții, care pot fi simbolizate algebric prin:

$b - a = d - c$ proporție aritmetică

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ proporție geometrică

$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c}$ proporție armonică.

Dacă considerăm proporțiile continue (cu trei termeni), vom avea:

$$b - a = c - b \quad \text{ca } 1,2,3$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{ca } 1,2,4$$

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \quad \text{ca } 2,3,6.$$

Putem, de asemenea, simboliza aceste trei proporții prin ecuațiile echivalente:

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{c}$$

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{a}.$$

Uitându-ne la a treia ecuație ne dăm seama că proporția armonică este o combinare a celorlalte două; ea apare în muzică (în studiul intervalelor diatonice și armonice), în timp ce proporția geometrică, *analogia* lui Vitruviu, mama similitudinilor geometrice, domină artele vizuale, în mod deosebit arhitectura. Aceste trei tipuri principale de proporții erau cunoscute de pitagoreici încă de pe vremea Ligii crotoniate și au fost pesemne comunicate lui Platon de către Archytas din Tarent în timpul primei sale călătorii în Magna Graecia. Eudoxiu și discipolii apropiați ai lui Platon le-au ridicat numărul la șase, apoi neopitagoricienii Myonides și Euphranor, prin secolul I î.Hr., au mai găsit patru, ridicând numărul total la 10^1, numărul Decadei, scump Confreriei, pe care îl găsiseră deja în numărul raporturilor posibile.

Am arătat mai înainte că lui Platon îi plăcea să conceapă proporția ca pe o „medietate", legătură de armonie între două mărimi.

Iată relațiile între mezi și extremi în cele trei tipuri uzuale de proporții:

Media aritmetică a lui a și b ... $\frac{a+b}{2}$

Media geometrică a lui a și b ... $\sqrt{ab}$

Media armonică a lui a și b ... $\frac{2ab}{a+b}$.

Aceasta din urmă se mai poate scrie:

$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, care se armonizează cu formulele de mai sus pentru proporțiile cu trei termeni

$b-a=c-b$ proporție aritmetică

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ proporție geometrică

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ proporție armonică.

Conceptul de medie poate fi aplicat unui număr oarecare de termeni; de exemplu pentru 5 termeni a, b, c, d, e:

Ma = Medie aritmetică $\frac{a+b+c+d+e}{5}$

Mg = Medie geometrică $\sqrt[5]{abcde}$

Mh = Medie armonică $\frac{5}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}}$.

Dacă ne întoarcem la cei doi termeni inițiali a și b, avem între cele trei medii următoarea relație:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{a+b}{2}\times\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}$$

sau: media geometrică a două mărimi este în același timp media geometrică între media lor aritmetică și media armonică.

Pentru a stabili logic șirul celor zece proporții, Nicomachos din Gerasa și Theon din Smirna folosesc „Principiul economiei" și pe cel al „Aceluiași și al Celuilalt".

Să-l citățm pe Nicomah:

„Principiul care guvernează aceste probleme de proporții poate arăta că toate varietățile acestor specii pot să se tragă numai din egalitate precum dintr-o mamă sau dintr-o rădăcină..."

Și pe Theon:

„Luăm astfel trei mărimi și proporțiile care rezidă în ele; schimbăm între ei termenii și arătăm că toată matematica este constituită din proporțiile dintre cantități și că sursa și elementele sale se rezumă în esența proporției."

Nicomachos și Theon ajung la cele zece tipuri prezentate mai sus permutând în toate felurile cu putință literele a, b, c cu expresia inițială $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Al zecelea tip, $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$, este foarte important, căci sub aparența sa discretă se ascunde principiul formării șirului definit prin recurență cu doi termeni, sau șirul lui Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

$\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$ echivalează într-adevăr cu c = a + b după cum ne putem da seama înmulțind în crucea Sfântului Andrei cei patru factori ai celor două fracții și făcând reducerea.

Am arătat deja că lui Platon i-a plăcut în mod deosebit conceptul de medietate, pe care îl aplică fără deosebire la proporții din domeniul matematicii, muzicii, cosmogoniei și chiar al metafizicii. Pentru el, „problema armonică generală" constă în a intercala medietatea necesară pentru a lega două mărimi, două intervale muzicale sau două entități logice, două temperamente și a stabili o consonanță (συμφονία).

Termenul mediu într-un silogism, strălucirea metaforei potrivite, „numărul" sau raportul caracteristic ce înșiruie proporțiile și produce *euritmia* finală într-un traseu arhitectural (vezi la note „fraza cheie" a lui Vitruviu) toate acestea pentru Platon și neopitagoreici țin de conceptele de proporție și de medietate.

Îndeosebi în arhitectură conceptul de proporție și cel de *simetrie*[2] sau mai degrabă de *symmetria*[2], care rezultă din el, domină într-adevăr nu numai arhitectura grecească și romană, ci și arhitectura gotică, ale cărei diagrame secrete de punere în proporție se transmiteau direct din tată în fiu sau de la maestru la discipol și erau derivate din geometria pitagoreică și din tainele sale păstrate cu strășnicie.

Aceste concepte apar și în arhitectura și pictura Renașterii timpurii, după cum reiese în urma punerii în lumină de către Luca Pacioli, „călugărul beat de frumusețe", a teoriei proporțiilor a lui Platon, a studiului celor cinci corpuri regulate și a Secțiunii de Aur sau *Proporția Divină*, chiar titlul lucrării sale publicată la Veneția în

1509 și ilustrată cu frumoasele epure ale prietenului său, Leonardo da Vinci. Am arătat în amănunt, în mai multe lucrări, legătura dintre pitagorism și arhitectura marilor epoci occidentale (vezi *Numărul de Aur*, vol. 2).

A venit momentul să citățm forma principiului analogiei în Arte stabilită de Thiersch în secolul al XIX-lea; este vorba de arhitectură, dar principiul se aplică la fel de bine în compoziția picturală și în muzică.

„Privind cu atenție cele mai izbutite opere din toate timpurile am descoperit că în fiecare dintre ele *o formă fundamentală se repetă*, și că prin compunerea și dispunerea lor părțile formează figuri asemănătoare... Armonia nu rezultă decât din repetarea figurii principale a operei în subdiviziunile sale." *(Die Proportion in der Architektur.)*

Acestea sunt chiar învățăturile Principiului analogiei al lui Pythagoras transmise de către arhitecții greci, iar Alberti, un alt prieten al lui Leonardo, el însuși unul dintre oamenii cei mai completi ai Renașterii, în tratatul său despre arhitectură, de o puritate de cristal, redactat în latină, repetă chiar cuvintele lui Pythagoras:

Certissimum est naturam in omnibus sui esse persimilem.

Și în legătură cu „lineamenta" sau linii regularizatoare ale planului,

... in aedificiis esse lineamenta sentiamus, ubi una, atque eadem in illis spectetur forma.

Vom vedea mai departe, în legătură cu Numărul în muzică, faptul că Pythagoras a fost, după o tradiție de necontestat, inventatorul gamei diatonice și deci tatăl întregii muzici occidentale. Matematica pitagoreică, mai ales teoria proporțiilor, dezvoltată ulterior de Platon, a fost rezultatul studiului intervalelor muzicale. Într-adevăr, grecii nu comparau frecvențele corzilor vibratorii, pe care nu le măsuraseră, ci lungimile lor, ceea ce însemna același lucru (frecvențele și lungimile sunt invers proporționale), iar teoria rezultând din intervalele muzicale și din proporțiile lor putea mai apoi să fie transferată direct la studiul proporțiilor între mărimi lineare oarecare. Regăsim aici și Tetraktys-ul, și unul dintre motivele însemnătății sale, faptul că progresia 1, 2, 3, 4 oferă principalele raporturi dintre intervalele gamei diatonice, cel de 4 la 2 sau de 2 la 1 octava (διὰ πασῶν), cel de 3 la 2 cvinta (διὰ πέντε), prezența numărului 5 = 3 + 2 sau Pentada ridicând în slăvi importanța cvintei din care a rezultat gama diatonică pitagoreică (vezi cap. XVII), cel de 4 la 3 cvarta; putem așadar spune împreună cu Delatte că:

„Tetraktys-ul este mulțimea celor patru numere ale căror raporturi reprezintă acordurile muzicale esențiale".

Tetraktys-ul ajunge astfel să fie identificat cu Armonia însăși (este și un aspect, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, al Divinei Decade).

„Catehismul" pitagoreic citat de Iamblichos spunea, între altele, (menționat mai înainte):

„Tetraktys, armonie pură, aceea a Sirenelor!" (Este vorba despre sirenele cosmice, portavoce planetară a armoniei Sferelor.)

Pentru a sublinia și mai mult intensitatea extatică la care putea ajunge ceea ce am numit în altă parte „Mistica înghețată a Numărului Pur" și mai ales venerarea Tetraktys-ului, voi cita iarăși un alt text pitagoreic cunoscut sub numele de „Rugă către Tetraktys", care este, totodată, o invocare a numărului divin:

„Binecuvântează-ne, număr divin, tu care i-ai zămislit pe zei și pe oameni! O sfânt, sfânt Tetraktys, tu care ești cuprins în rădăcina și în izvorul șuvoiului veșnic al creației!Căci numărul divin începe cu unitatea pură și profundă și atinge mai apoi numărul Sacru Patru; apoi el o zămislește pe mama a toate câte sunt, care leagă totul, cel dintâi născut, cel care nu greșește niciodată, care nu pregetă niciodată, Zecele Sacru, care ține cheia tuturor lucrurilor".

Înainte să părăsim domeniul Proporției doresc să prezint două proporții îndrăgite de pitagoreici, și anume, Proporția Universală, un grup de patru numere care înseamnă prescurtarea celor trei tipuri principale de proporții și o reflectare muzicală a Tetraktys-ului, cealaltă proporție fiind „Secțiunea de Aur" sau Proporția Divină pe care am menționat-o deja și despre care vom vorbi în celelalte capitole.

Proporția Universală era progresia complexă 6, 8, 9, 12 din care puteau rezulta: 12 – 9 = 9 – 6, proporție aritmetică cu rația 3

$$\frac{12}{8} = \frac{9}{6}$$ proporție geometrică

$$\frac{12-8}{8-6} = \frac{12}{6}$$ proporție armonică.

Proporția Universală are și proprietatea complementară foarte importantă de a furniza, prin raporturile dintre numerele sale, intervalele gamei pitagoreice, de fapt aceleași pe care le furnizează și Tetraktys-ul; dacă luăm o liră tetracordă cu corzile proporționale cu 6, 8, 9, 12 (frecvențele notelor sunt în ordine inversă 12, 9, 8, 6 de la stânga la dreapta) astfel încât coarda 12 să corespundă notei Mi_1,

vom avea: tonul $La_1\ Si_1 = \frac{9}{8}$

octava $Mi_1\ Mi_2 = \frac{12}{6} = 2$

cvarta $Mi_1\ La_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

cvinta $Mi_1\ Si_1 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

(Fig. 1, Planșa III)

Vedem aici motivul pentru care pitagoricienii au inventat tipuri speciale de raporturi numite sescvialtere etc., și utilitatea lor în teoria

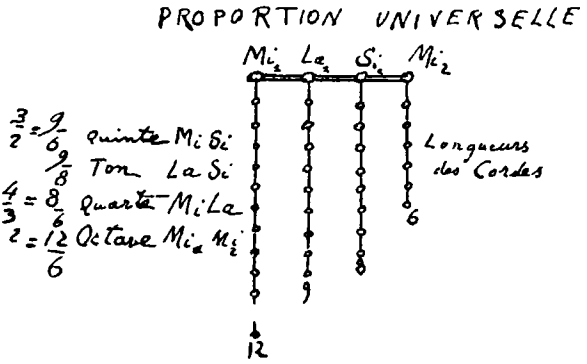


Fig. 1

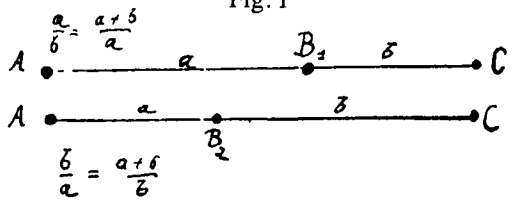


Fig. 2

PLANȘA III

gamei (în mod deosebit a gamei diatonice a cvintelor pe care o vom studia în capitolul XVII).

Nu am epuizat proprietățile pentru care discipolii lui Pythagoras se simțeau atât de mult atrași de Proporția Universală 6, 8, 9, 12; ea are într-adevăr și un aspect geometric datorat faptului că:

6 reprezintă numărul de fețe ale cubului
8 reprezintă numărul vârfurilor cubului
12 reprezintă numărul laturilor cubului
9 se mulțumește să fie pătratul primului număr masculin.

Proporția Divină sau Secțiunea de Aur, a cărui alcătuire pare să fi fost secretul matematic păstrat cu cea mai mare strășnicie de către Confreria pitagoreică și care guvernează nu numai cea mai mare parte a planurilor arhitecturii grecești, apoi gotice, ci și morfologia biologică, se poate stabili plecând de la logica pură, cel puțin de la „Principiul economiei conceptelor" al lui William Ockham, doctor scolastic din secolul al XIV-lea (*Entia non sunt multiplicanda sine necessitate*). Acest principiu este în oarecare măsură aspectul logic al principiului minimei acțiuni.

Secțiunea de Aur este într-adevăr modul cel mai logic de a împărți asimetric (adică altfel decât prin împărțirea în două părți egale) o mărime măsurabilă, de exemplu un segment de dreaptă AC, în două mărimi inegale, astfel încât raportul dintre cea mare și cea mică să fie egal cu raportul dintre suma celor două (întregul) și cea mare. Atunci, dacă B este punctul care împarte astfel dreapta AC și dacă AB = a și BC = b, avem prin definiție $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$, adică o proporție geometrică. Pentru a obține aceeași ecuație prin principiul economiei plecăm de la proporția continuă cu trei elemente a, b, c, adică $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, apoi punem „din economie" c = a + b, reducând cele trei elemente ale proporției la 2, a și b, de unde $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$. Aici a este segmentul cel mai mic, dar cele două ecuații sunt echivalente și dau aceleași soluții. Reducând cele două ecuații, obținem în primul caz $a^2 = ab + b^2$ sau, împărțind peste tot cu b^2

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} + 1 \text{ sau } \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

din forma $x^2 - x - 1 = 0$

Necunoscuta $\frac{a}{b}$ este egală cu $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$ rădăcină pozitivă 1,618..., și $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 0{,}618\ldots$, rădăcină negativă.

Rădăcina negativă este egală cu inversul (cu semnul –) rădăcinii pozitive, căci $0{,}618 = \frac{1}{1{,}618}$.

A doua egalitate tratată la fel dă

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0$$

și rădăcinile au aceeași valoare, numai că aici $\frac{b}{a}$ este mai mare decât 1. Cele două operații reprezintă respectiv pozițiile B_1 și B_2 pe segmentul AC dacă este vorba de un segment de dreaptă ce trebuie împărțit conform proporțiilor Secțiunii de Aur. (Fig. 2, Planșa III).

O altă metodă și mai logică (dar mai înceată) pentru a găsi ecuația fundamentală $x^2 - x - 1 = 0$ constă în a desemna prin a, b, c, lungimile respective AB, BC, AC, apoi în a forma toate raporturile posibile între cele trei elemente; obținem astfel $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}$.

Egalând pe rând aceste raporturi două câte două, obținem toate proporțiile posibile între acești 3 termeni, adică 15 proporții care se reduc în final la împărțirea simetrică a = b și la împărțirile asimetrice $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ (a = AB fiind cel mai lung dintre cele două segmente AB și BC) și $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ (b = BC fiind cel mai lung), înlocuind pe c cu a + b obținem din nou egalitățile reduse obținute mai sus și ecuația fundamentală:

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ sau } x^2 = x + 1\ ^3$$

Raportul Secțiunii de Aur este, în general, simbolizat prin $\varnothing$.

Atunci $\varnothing^2 = \varnothing + 1$, de unde, înmulțind cei doi termeni cu $\varnothing$ de un număr nedefinit de ori, avem $\varnothing^n = \varnothing^{n-1} + \varnothing^{n-2}$.

Adică în orice progresie geometrică cu rație $\varnothing$, fiecare termen este egal cu suma celor doi care îl precedă.
Expresia rămâne adevărată dacă n este negativ, n = – m.

Atunci $\frac{1}{\varnothing^m} = \frac{1}{\varnothing^{m+1}} + \frac{1}{\varnothing^{m+2}}$, fiecare termen este egal cu suma următorilor doi, progresia este descendentă. (Fig. 3, Planșa IV)

În planșa IV, figurile 1 și 2, sunt date cele două construcții clasice ale Secțiunii de Aur; în prima se dă AB segmentul cel mai mare, în a doua întregul (suma de obținut a celor două segmente), AC. Construcțiile rezultă din expresia $\varnothing = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ și din teorema pătratului ipotenuzei.

Asemeni Secțiunii de Aur, pentagonul regulat, pentagrama (pentagonul în formă de stea) și decagoanele regulat și în formă de stea sunt legate prin expresiile:

(dacă P_r este latura pentagonului regulat
P^e este latura pentagonului în formă de stea
D_r este latura decagonului regulat
D_e este latura decagonului în formă de stea
R este raza cercului circumscris)

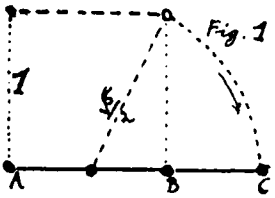
$$\frac{P_e}{P_r} = \varnothing \frac{R}{D_r} = \varnothing \frac{D_e}{R} = \varnothing,$$

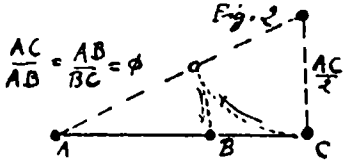
laturile acestor patru poligoane se vor obține prin construcții bazate tot pe construcția Secțiunii de Aur; de exemplu: 1° să se găsească laturile pentagonului; ale pentagramei, ale decagonului regulat și ale decagonului în formă de stea înscrise într-un cerc dat (fig. 3, pl. 4 și 2° să se construiască un pentagon cu latura dată (fig. 4, pl. IV).

Expresiile importante în întrebuințarea algebrică a Secțiunii de Aur sunt:

$\varnothing = 1{,}61803\ldots$ sau practic 1,618

$\varnothing^2 = 2{,}618$





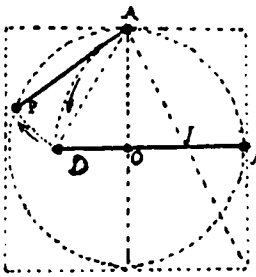


Fig. 3

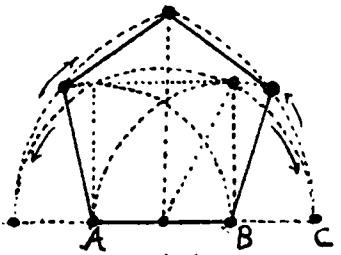
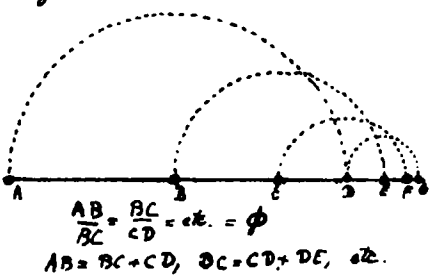


Fig. 4



PLANȘA IV

$$\frac{1}{\varnothing} = 0{,}618$$

$$\sqrt{5} = 2\varnothing - 1 \qquad = 2{,}236...$$

Numărul algebric (adică rădăcina unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali) $\varnothing$ este cel mai „original" și cel mai important din mulțimea numerelor algebrice. Avem[4] într-adevăr expresiile următoare:

$$\varnothing = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

și $$\varnothing = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}$$

Aceste relații strânse între $\varnothing$ și unitatea, monada, „rădăcină" a tuturor numerelor, explică proprietățile algebrice și geometrice extraordinare ale Secțiunii de Aur.

În legătură cu șirul sau progresia geometrică $1, \varnothing, \varnothing^2, \varnothing^3, \dots \varnothing^n$, voi menționa că proprietatea generală $\varnothing^n = \varnothing^{n-1} + \varnothing^{n-2}$ se găsește și în șirul lui Fibonacci sau șir definit prin recurență cu doi termeni F = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... în care fiecare termen este, de asemenea, egal cu suma celor doi care îi precedă.

Raportul a doi termeni consecutivi tinde foarte repede spre $\varnothing$ ($\frac{55}{34}$ este egal cu 1,6177 și ... $\frac{89}{55}$ cu 1,618...).

Nu voi insista aici asupra rolului șirului lui Fibonacci în botanică, datorat, între altele, faptului că prin simple adunări uniforme de elemente identice el poate obține curbe sau suprafețe de creștere *omotetice*, adică asemănătoare, cu alte cuvinte să înlocuiască, printr-un șir definit prin recurență cu doi termeni, progresia geometrică ideală către care tinde asimptotic, în numere întregi. Principiul analogiei se aplică într-adevăr la fel de bine în morfologia biologică (creșterea plantelor, a scoicilor etc.), ca și în artă.

Îi trimit din nou pe cititorii curioși să afle mai multe despre acest subiect la cartea mea *Numărul de Aur;* vor găsi acolo și amănunte despre rolul formelor înrudite cu șirul $\varnothing$ (pentagonul, dodecaedrul, icosaedrul) în morfologie și despre prezența lor în rețeaua de proporții a corpului omenesc. Aici mă voi mulțumi să mai aduc puțină lumină în problema proporțiilor pur aritmetice și algebrice ale șirului $\varnothing$.

Încep prin a preciza că proprietatea lui $\varnothing$ de a fi limită a raportului între doi termeni consecutivi este comună nu numai șirului F și șirurilor numerice recurente înrudite, ci și tuturor șirurilor definite prin recurență obținute plecând de la doi termeni oarecare și al căror tip este a, b, (a + b), b + (a + b), b + 2 (a + b), 2b + 3 (a + b), 3b + 5 (a + b);...

sau a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, 5a + 8b, ...

Numind U_n termenul de rang n al acestei serii avem la limită:

$$\frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \varnothing \frac{(a + b\,\varnothing)}{(a + b\,\varnothing)} = \varnothing .$$

Una dintre proprietățile caracteristice ale funcției exponențiale în analiză, anume că derivatele primă, secundă... etc., de ordinul a^x o reproduc identic, își are contraponderea într-o altă proprietate comună progresiei $\varnothing$ și tuturor șirurilor definite prin recurență cu doi termeni, dintre care șirul Fibonacci sau șirul F este tipul cel mai pur; diferențele primă, secundă etc. ale termenilor din aceste șiruri reproduc nedefinit șirul inițial.

Folosindu-ne de conceptul grecesc al numerelor figurate (care își are locul în capitolul următor), am putea să dăm numerelor din șirul lui Fibonacci numele de numere „spirale"; fac din nou trimitere la lucrările mele de estetică pentru cititorii interesați de raporturile dintre $\varnothing$, șirul F, spirala logaritmică și „creșterea gnomonică". Tabelul următor va lămuri legăturile strânse dintre șirul $\varnothing$ și șirul F:

$$\varnothing^0 = 0 + 1 = 1 + 0$$

$$\varnothing^1 = 0 + \varnothing = 1 + \frac{1}{\varnothing}$$

$$\varnothing^2 = 1 + \varnothing = 2 + \frac{1}{\varnothing}$$

$$\varnothing^3 = 1 + 2\,\varnothing = 3 + \frac{2}{\varnothing}$$

$$\varnothing^4 = 2 + 3\,\varnothing = 5 + \frac{3}{\varnothing}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Patru șiruri F verticale se desfășoară aici unul după altul.

Alt tabel:

$$\varnothing^n = 1\varnothing^n$$

$$= 1\varnothing^{n-1} + 1\varnothing^{n-2}$$

$$= 1\varnothing^{n-2} + 2\varnothing^{n-3} + 1\varnothing^{n-4}$$

$$= 1\varnothing^{n-3} + 3\varnothing^{n-4} + 3\varnothing^{n-5} + 1\varnothing^{n-6}$$

$$= 1\varnothing^{n-4} + 4\varnothing^{n-5} + 6\varnothing^{n-6} + 4\varnothing^{n-7} + 1\varnothing^{n-8}$$

Toate acestea sunt adevărate oricare ar fi n, chiar negativ sau fracționar.

Mark Barr a observat că coeficienții puterilor lui ∅ astfel grupați reprezintă triunghiul lui Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

alcătuit prin scrierea mai întâi a unei coloane verticale de unități, apoi la dreapta ei a coloanei numerelor întregi și continuând tabelul astfel încât fiecare număr să fie egal cu suma dintre cel care se găsește deasupra lui și cel care se găsește la stânga acestuia din urmă.

Proprietățile triunghiului lui Pascal vor fi detaliate în alte capitole; el intervine în geometrie până în spațiile cu un număr oarecare de dimensiuni, unde ne dezvăluie specificațiile politopilor sau hipercorpurilor lor regulate, are un rol unic în teoria binomului, în aceea a combinărilor, de care e strâns legată, apare în calculul probabilităților și în curba în formă de clopot a lui Gauss etc.

Aceste pagini sunt o anticipare a capitolului în care vor fi dezvoltate noțiunile de numere reale, algebrice și transcendente; în capitolul următor ne vom ocupa mai întâi de domeniul, în mod deosebit fecund, inventat de pitagoreici, al Numerelor Figurate în care formele geometrice sunt într-adevăr figurate prin adunări de puncte corespunzând unor numere întregi (am întâlnit deja, combinate, Tetraktys-ul, triunghiul și Decada).

O să mai semnalez, la sfârșitul acestui capitol, numai unul din rebusurile *diofantine* (exprimate în numere întregi) ale lui Platon, adică „Numărul Nupțial", butadă biologico–astronomică bazată pe prelungirea teoremei pătratului ipotenuzei în trei dimensiuni prin lungimi proporționale cu 3, 4, 5, 6.

Avem într-adevăr: $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$

sau $216 = 125 + 64 + 27 = 3 \times 72.$

Suma cuburilor construite pe cele trei laturi ale unui triunghi al lui Pythagoras (cu laturile proporționale cu 3, 4, 5) este egală (ca volum) cu cubul construit pe o dimensiune lineară proporțională cu 6.

Aceasta este, de altfel, marea diagonală a cubului 3, 4, 5.

În această formulă Platon stabilește în realitate o legătură între un ciclu lunar și conjuncturile prielnice nașterii. Numărul 72 (unghiul de 72° este opus laturii pentagonului) este unul dintre cele mai importante în cosmologia mitologică și în astrologie.

NOTE

[1] Celelalte șapte tipuri de proporții (în plus față de cele 3 clasice) sunt:

$\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{a}$ ca 3, 5, 6 $\quad\frac{c-a}{b-a}=\frac{c}{a}$ ca 6, 8, 9 $\quad\frac{c-a}{c-b}=\frac{b}{a}$ ca 3, 5, 8

$\frac{b-a}{c-b}=\frac{b}{a}$ ca 2, 4, 5 $\quad\frac{c-a}{c-b}=\frac{c}{a}$ ca 6, 7, 9

$\frac{b-a}{c-b}=\frac{c}{b}$ ca 1, 4, 6 $\quad\frac{c-a}{b-a}=\frac{b}{a}$ ca 4, 6, 7

[2] Iată ceea ce putem numi „fraza cheie" a lui Vitruviu în care apar proporția, symmetria și euritmia:

„Simetria (*symmetria*) constă în acordul de măsură între diferitele elemente ale operei și între aceste elemente luate separat și în ansamblu... Le fel ca în corpul omenesc... ea decurge din proporție – aceea pe care grecii o numesc „Analogia" – consonanță între fiecare parte și întreg... Această simetrie este reglată prin modul, etalonul de comună măsură (pentru opera avută în vedere), ceea ce grecii numesc „posotes" („numărul")... Când fiecare parte însemnată a edificiului este în plus și potrivit proporționată, datorită acordului între înălțime și lățime, între lățime și adâncime, și când toate aceste părți își au locul în simetria totală a edificiului, obținem euritmia."

Vedem astfel că prin *symmetria* grecii înțelegeau ceva cu totul diferit de simetria noastră modernă (cuvântul și-a pierdut sensul logic către sfârșitul secolului al XVII-lea); nu era vorba de receptarea unor elemente identice de o parte și de cealaltă a unui arc sau plan de simetrie, ci de o „comodulație" reglată de o proporție între ansamblu și întreg. Tot astfel *modulul* în fraza lui Vitruviu pare să nu fie împărțirea alicotă a unei unități de mărime, ci un modul-raport, raportul caracteristic al proporției celei mai însemnate (analogia).

[3] Este metoda definită de Theon din Smirna.

[4] Aceasta rezultă dintr-o teoremă generală a profesorului Nathan Altshiller-Court (de la Universitatea din Oklahoma), prin care dovedește că în ecuația $x^2 = x + a$, rădăcina cea mai mare $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ este la limită egală cu $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$ și rădăcina cea mai mică este egală la limită cu

$$\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{\cdots}}}}$$

CAPITOLUL VI

NUMERELE ȘI FORMELE – NUMERE FIGURATE PLANE ȘI SOLIDE ALE ANTICILOR ȘI ALE LUI DESCARTES – NUMERELE FIGURATE CU n DIMENSIUNI – TRIUNGHIUL, PIRAMIDA ȘI HIPERPIRAMIDA LUI PASCAL

Nu există certitudine acolo unde nu putem aplica nici una dintre științele matematice și nici una dintre cele întemeiate pe matematică.

(Leonardo DA VINCI)

Am menționat deja Numerele Figurate și rolul lor în matematica pitagoreică; ele ilustrează foarte bine corelația, deseori uitată de atunci, între Numere și Forme (sau între Numere și Idei, după cum spunea Platon, pentru care conceptele de Formă și Idee fuzionau într-un același arhetip).

În spațiul cu două dimensiuni (planul) numerele *poligonale* corespund unor sume de numere de puncte care reprezintă ele însele formele crescătoare din punct de vedere omotetic (adică prin figuri asemănătoare) ale poligoanelor regulate (planșa V).

Exemplu:

Numerele triunghiulare

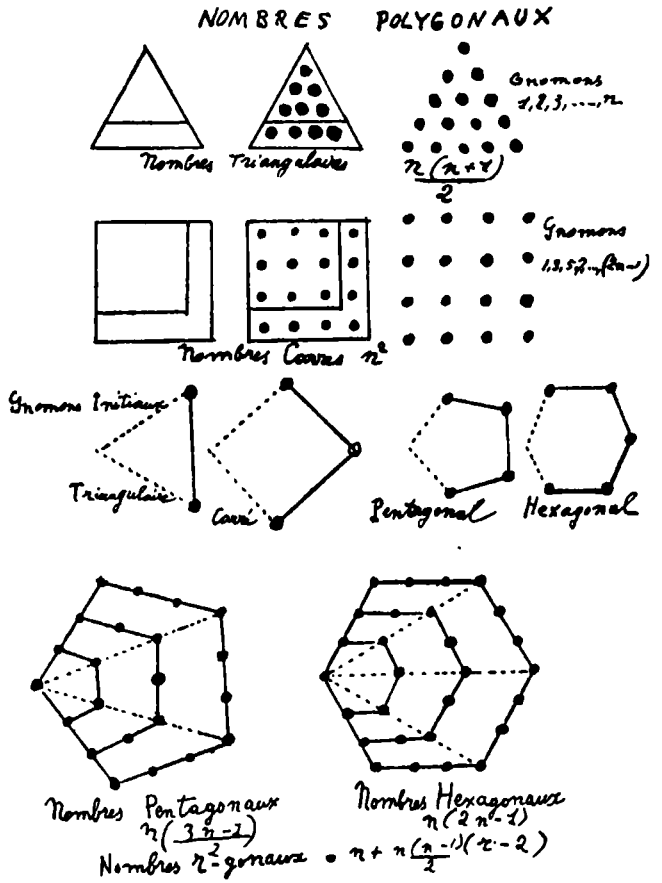
$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\ldots, \frac{n(n+1)}{2}$$

(diferențele, două câte două ale numerelor consecutive din șir dau șirul numerelor întregi (1, 2, 3, 4, 5... n).

Am mai întâlnit acest șir de numere triunghiulare în coloana a III-a verticală a triunghiului lui Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Fiecare număr triunghiular reprezintă și un triunghi echilateral format dintr-un număr de puncte egal chiar cu acest număr triunghiular; obținem astfel triunghiul (și numărul triunghiular) următor adăugând de fiecare dată un rând de puncte în număr egal cu numerele de puncte de la baza triunghiului precedent plus unu. Numărul de puncte ce trebuie adăugat numărului triunghiular este n + 1, după cum putem vedea în planșă și în cele două șiruri deja explicitate.



PLANȘA V

$1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\ldots, \frac{n(n+1)}{2}$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\ldots\ldots n$

Numerele din șirul inferior (aici șirul numerelor întregi), cele care trebuiau adăugate numerelor corespunzătoare din șirul superior pentru a prelungi nedefinit șirul triunghiular se numeau „gnomoni" în disciplina pitagoreică a numerelor figurate; noi le numim „diferențe prime".

Continuând avem șirul numerelor pătrate:

$1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 \ldots\ldots n^2$

sau

$1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots\ldots n^2$

$3, 5, 7, 9, 11 \ldots\ldots\ldots\ldots$ diferențe prime sau gnomoni.

După cum vedem în planșa V, gnomonii capătă aici forma unui echer pătrat; fiecare gnomon adaugă un număr de puncte ce fac parte din șirul numerelor impare.

Numerele pentagonale sunt $1, 5, 12, 22, 35, \ldots\ldots \frac{n(3n-1)}{2}$

gnomoni $1\ 4\ 7\ 10\ 13 \ldots\ldots\ldots\ldots 3n-2$

Vedem că diferențele secunde (diferențele prime ale gnomonilor) sunt constante și egale aici cu trei.

Numerele hexagonale

$1, 6, 15, 28, 45 \ldots n(2n-1)$

gnomoni $1\ 5\ 9\ 13\ 17 \ldots 4n-3$

cu diferență secundă constantă 4.

Și în general:

Numere r-gonale, corespunzând poligoanelor regulate cu r laturi,

$1+0(r-2), 2+1(r-2), 3+3(r-2), 4+6(r-2)\ldots, n+\frac{n(n-1)(n-r)}{1,2}.$

Gnomonul celui de-al (n–1)-lea număr r-gonal este 1 + (n–1) (r–2).

Amintim că $1, 3, 6\ldots, \frac{n(n-1)}{2}$ sunt primele (n–1) numere triunghiulare; această prezență a numerelor triunghiulare în șirul general al numerelor poligonale provine din faptul că creșterile omotetice ale poligoanelor regulate au ca element fundamental creșterea triunghiulară începând cu un pol de creștere (un vârf

oarecare al poligonului), după cum putem constata pe diagramele din planșa V.

De asemenea ne putem închipui creșterea efectuându-se începând din centrul figurii poligonului; numerele hexagonale *centrate* sunt, de exemplu:

$$1, 7, 19, 37, 61, 91 \ldots\ldots, 1 + \frac{6n(n+1)}{2}.$$

Avantajul acestor numere constă în faptul că ele reprezintă și numerele circumferințelor tangente egale pe care le putem avea în jurul unei circumferințe (egală) centrale, socotind circumferințele interioare. Centrele acestor circumferințe reprezintă rețeaua de puncte cea mai *izotropă* cu putință din plan; ea echivalează, de altfel, cu rețeaua formată de echipartițiile izotrope din plan ale triunghiurilor echilaterale sau ale hexagoanelor regulate (aceasta rezultă între altele din faptul că raza unei circumferințe este egală cu o latură a hexagonului regulat înscris).

Să observăm că diferențele prime ale numerelor hexagonale centrate sunt:

$$6, 12, 18, 24, 30 \ldots$$

ale căror diferențe (diferențe secunde din șirul hexagonal centrat) sunt constante și egale cu 6.

Să mai notăm că pentru gnomonii șirurilor poligonale normale (necentrate) valoarea constantă a diferenței secunde este dată de teorema lui Hipsicles $\Delta_r^2 = r - 2$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Am notat deja că cea de-a treia coloană verticală din triunghiul lui Pascal dă șirul de numere triunghiulare prelungit nedefinit; voi mai adăuga aici că acest algoritm[1] (triunghiul lui Pascal) extraordinar permite, de asemenea, după cum vom vedea, să se obțină nu numai numerele solide și hipersolide din șirul triunghi-tetraedru într-un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni; el oferă și coeficienții binomului lui Newton $(1 + x)^n$ pentru orice valoare a lui n, precum și numărul de combinări de tipul cel mai general, de m obiecte de n specii diferite (aceasta datorită piramidei și hiperpiramidelor lui Pascal).

În spațiul cu trei dimensiuni avem Numerele Figurate solide, sau numere poliedrale, studiate și ele de pitagoreici și reluate de Descartes în tratatul *Progymnasmata de Solidum Elementis* (manuscris găsit la Stockholm după moartea sa); el mai stabilește și legea formării gnomonilor pentru poliedrele regulate.

Să mai amintim că, deși numărul polinoamelor regulate este infinit, cel al poliedrelor regulate se reduce la 5 (corpurile platoniciene); Descartes, la începutul tratatului menționat mai sus, face dovada și calculează specificațiile:

	Vârfuri	Laturi	Fețe	
Tetraedrul	4	6	4	(triunghiuri echilaterale)
Cubul	8	12	6	(pătrate)
Octaedrul	6	12	8	(triunghiuri echilaterale)
Dodecaedrul	20	30	12	(pentagoane)
Icosaedrul	12	30	20	(triunghiuri echilaterale)

Între numerele vârfurilor, fețelor și laturilor poliedrelor regulate și semiregulate (cele 13 corpuri „arhimediene", șirul prismelor regulate și cel al antiprismelor regulate, amândouă infinite) avem formula lui Euler:

$$s + f = c + 2$$

Această formulă este un caz particular al formulei lui Schläfli pentru politopurile sau corpurile regulate într-un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni.

Cubul și octaedrul sunt reciproce (fiecare se poate deriva din celălalt luând ca vârfuri centrele fețelor acestuia din urmă), tetraedrul este „autoreciproc", se transformă în el însuși, dodecaedrul și icosaedrul sunt reciproce.

Pitagoreicii au studiat numerele figurate solide și legea formării gnomonilor (aceea pe care o redescoperă Descartes):

Numere tetraedrale (sau piramidale) 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 ...

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2}$$

Numere cubice 1, 8, 27, 64, 125 ... n^3

Numere octaedrale 1, 6, 19, 44, 85 ...

Numere dodecaedrale 1, 20, 84,

$$220, 455 \ldots \frac{n(9n^2 - 9n + 2)}{2}$$

Numere icosaedrale 1, 12, 48, 124,

$$255 \ldots \frac{n(5n^2 - 5n + 2)}{2}$$

Nu ne vom mira constatând că a patra coloană verticală din triunghiul lui Pascal ne dă șirul numerelor tetraedrale sau piramidale 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84; acest lucru este adevărat pentru un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni: coloana a V-a ne dă numerele pentaedroidale sau hiperpiramidale într-un spațiu cu patru dimensiuni, 1, 5, 15, 35, 70, 126 ș.a.m.d. pentru orice număr de dimensiuni: coloana n + 1 ne dă șirul numerelor care corespund șirului triunghiular într-un spațiu cu n dimensiuni.

Al n-lea număr triunghiular este $\frac{n(n + 1)}{2}$.

Al n-lea număr piramidal (3 dimensiuni) este $\frac{n(n + 1)(n + 2)}{1.2.3}$

Al n-lea număr hiperpiramidal în 4 dimensiuni este

$$\frac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{1.2.3.4}$$

Al n-lea număr hiperpiramidal în K dimensiuni este

$$\frac{n(n + 1)(n + 2)\ldots (n + k - 1)}{k!}.$$

Și mai remarcabil este faptul că același triunghi al lui Pascal ne dă și specificațiile, adică numerele vârfurilor, laturilor, fețelor, volumelor, celulelor etc. ale politopurilor regulate din șirul triunghi, tetraedru etc., într-un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni. Specificațiile pentru spațiul cu n dimensiuni ne sunt date aici de al n + 2-lea rând orizontal. Al patrulea rând ne dă, de exemplu, specificațiile

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
```

triunghiului, 3 vârfuri și trei laturi (în două dimensiuni), al cincilea rând ne dă specificațiile tetraedrului, 4 vârfuri, 6 laturi, 4 fețe (în 3 dimensiuni), al șaselea rând ne dă specificațiile pentahedroidului (hiperpiramidă sau hipertetraedru cu 4 dimensiuni), și acest lucru rămâne valabil pentru un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni. Vom vedea că, în această ordine de idei, este mai logic să desființezi coloana întâi, cea numai cu 1:

```
1
2 1
3 3 1
4 6 4 1
5 10 10 5 1
6 15 20 15 6 1
```

În acest caz, cifrele 1 de la sfârșitul fiecărui rând reprezintă suprafața, volumul sau hipervolumul, politopul însuși[2]. Coloana numerelor 1 fiind astfel desființată în triunghiul lui Pascal, șirul numerelor triunghiulare prelungite într-un spațiu cu n dimensiuni va fi dat de o a n-a coloană (de exemplu 1, 4, 10, 20... pentru numerele tetraedrice cu trei dimensiuni; tot astfel specificațiile corpurilor și hipercorpurilor din formația triunghiulară într-un spațiu cu n dimensiuni sunt date de al n + 1-lea rând orizontal (al patrulea rând 4, 6, 4, 1 dă specificațiile tetraedrului, trei dimensiuni).

Al n-lea număr hiperpiramidal cu k dimensiuni este

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{k!}$$

și al $(n-k+1)$-lea număr hiperpiramidal cu k dimensiuni este

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Vom regăsi triunghiul lui Pascal când vom studia hipercorpurile cu n dimensiuni și combinările.

Să ne întoarcem pe pământ, adică la numerele poliedrale. Descartes a stabilit pentru cele cinci șiruri de numere poliedrale regulate legi de formare logice.

Numere

Tetraedrale		Cuburi	
$1-0+0$	$+\ 0=\ 1$	$1^2\times3-1\times3+1$	$+\ 0=\ 1$
$3-0+0$	$+\ 1=\ 4$	$2^2\times3-2\times3+1$	$+\ 1=\ 8$
$6-0+0$	$+\ 4=10$	$3^2\times3-3\times3+1$	$+\ 8=27$
$10-0+0$	$+10=20$	$4^2\times3-4\times3+1$	$+27=64$
$15-0+0$	$+20=35$		

Octaedrale

$1\times2^2-1\times2^2+1$	$+\ 0=\ 1$
$3\times2^2-2\times2^2+1$	$+\ 1=\ 6$
$6\times2^2-3\times2^2+1$	$+\ 6=19$
$10\times2^2-4\times2^2+1$	$+19=44$

Icosaedrale

$15\times\ 1-1\times20+\ 6$	$+\ 0=\ 1$
$15\times\ 3-2\times20+\ 6$	$+\ 1=12$
$15\times\ 6-3\times20+\ 6$	$+12=\ 48$
$15\times10-4\times20+10$	$+48=124$

Dodecaedrale

$1\times3^3-2\times3^2+10$	$+\ 0=\ 1$
$5\times3^2-4\times3^2+10$	$+\ 1=\ 20$
$12\times3^2-6\times3^2+10$	$+20=\ 84$
$22\times3^2-8\times3^2+10$	$+84=220$

Descartes deduce de aici expresiile generale pentru al n-lea gnomon din fiecare serie. Al n-lea gnomon va fi:

Pentru numerele tetraedrale ... $\dfrac{n(n+1)}{?}$

Pentru numerele cuburi... $3n^2-3n+1$

Pentru numerele octaedrale ... $2n^2-2n+1$

Pentru numerele icosaedrale ... $15n^2-25n+12$

Pentru numerele dodecaedrale ... $\frac{27n^2 - 45n + 20}{2}$

Am dat aici penultimul tabel (cel al lui Descartes), pentru a arăta cât de subtile și greu de obținut erau analizele făcute de el acestor șiruri de numere poliedrale.

În șirurile tetraedrale, octaedrale și icosaedrale vedem apărând șirul vertical al numerelor triunghiulare (1, 3, 6, 10, 15 ...); dimpotrivă, în șirul dodecaedral apare șirul vertical pentagonal 1, 5, 12, 22, 35 ...; în șirul cubic apar cel al pătratelor și cel al numerelor întregi, care apar, de altfel, și în tabloul formării numerelor octaedrale și icosaedrale.

Să remarcăm că gnomonii șirului tetraedric

$$1, 4, 10, 20, 35..... \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$$

nu sunt alții decât șirul triunghiular

$$1, 3, 6, 10, 15, ...\frac{n(n + 1)}{2}$$

Să mai remarcăm că șirul dodecaedral

$$1, 20, 84, 220, 455 ... n(9n^2 - 9n + 2)$$

se poate forma din cel al numerelor pentagonale înmulțind termenii acestuia din urmă (1, 5, 22, 35, 51 ...) cu termenii corespunzători din șirul gnomonilor săi sau al diferențelor sale prime 1, 4, 9, 10, 13, 16... Într-adevăr, împreună cu reciprocul său, icosaedrul, dodecaedrul este dezvoltarea pentagonului în spațiul cu 3 dimensiuni.

Prezența șirului triunghiular în legile de formare a aproape tuturor șirurilor crescătoare provine, după cum a fost deja semnalat, din faptul că aceste creșteri se fac prin triunghiuri ieșite dintr-un pol de creștere (planșa V); această „înmugurire" triunghiulară continuă în spațiile cu un număr oarecare de dimensiuni.

În spațiul cu trei dimensiuni putem considera și numere poliedrice centrate, adică a căror creștere se dezvoltă începând din centru și figură și nu dintr-un vârf.

Și poliedrele semiregulate arhimedice se pretează la creșterea gnomonică reprezentată prin numere figurate. De exemplu, pentru *cuboctaedru* (fig. 1, planșa VI), corp semiregulat, ce poate fi înscris într-o sferă asemeni poliedrelor regulate, ale cărui vârfuri sunt mijloacele muchiilor fie ale cubului, fie ale octaedrului și care joacă

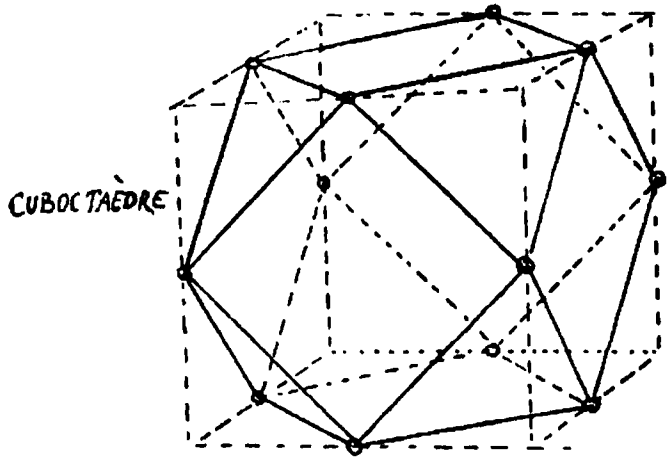
un rol capital în cristalografie; acest solid are 12 vârfuri, 24 de muchii egale, 14 fețe, din care 8 sunt triunghiuri echilaterale și 6 pătrate. Pentru împrospătarea memoriei, am să dau „șirul numerelor cuboctaedrice centrate", adică reprezentând creșterea nedefinită a unui cuboctaedru plecând de la centrul său (și nu dintr-un vârf ca în cazul numerelor figurate normale). Aceste numere corespund în spațiu numerelor hexagonale centrate din plan. Așa cum acestea din urmă reprezentau și umplerea planului printr-o îmbinare uniformă de cercuri tangente între ele, tot așa numerele cuboctaedrice centrate reprezintă umplerea spațiului cu o îmbinare izotropă de sfere egale tangente: o sferă drept centru, apoi douăsprezece sfere egale tangente cu prima etc.; punctele de tangență corespund cu vârfurile unui cuboctaedru, iar creșterea se efectuează în straturi concentrice de sfere în număr egal cu gnomonii numerelor cuboctaedrice centrate. Aceasta (rețeaua punctelor de tangență sau rețeaua asemănătoarea centrelor sferelor) reprezintă rețeaua de puncte cea mai izotropă (egală cu ea însăși în fiecare punct) din spațiu, această proprietate rezultând din faptul că muchia cuboctaedrului este egală cu raza sferei circumscrise, proprietate corespunzând în plan aceleia a hexagonului regulat (latura lui este egală cu raza cercului circumscris)[3].

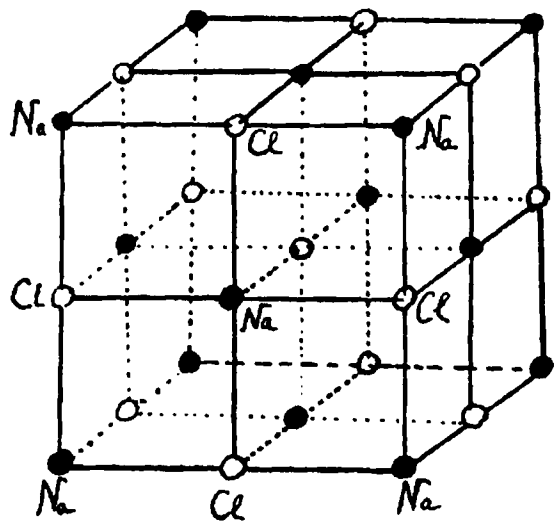
Înțelegem cu ușurință importanța a acestei rețele perfecte în cristalografie; sarea (NaCl) în special, dar și aurul, argintul, arama și aluminiul își dispun de cele mai multe ori atomii după această rețea cuboctaedrică (fig.2 planșa VI).

Trebuie să menționez acest amănunt, paradoxal în aparență: cu toate că în esență sistemul cuboctaedric care corespunde celui al sferelor egale tangente alcătuiește rețeaua de puncte cea mai izotropă cu putință, o îmbinare de cuboctaedre nu poate umple spațiul fără interstiții, nu oferă o echipartiție.

Dimpotrivă, putem umple complet spațiul cu n cuboctaedre și n octaedre având aceeași muchie sau cu n octaedre și 2 n tetraedre. Sau cu o îmbinare compactă de ceea ce am numit *sabots* (corp compus dintr-un semioctaedru și un tetraedru regulat alăturate).

Alt amănunt neașteptat: în vreme ce în plan se poate înfăptui echipartiția planului printr-o îmbinare de triunghiuri echilaterale (este, de altfel, un subgrup al echipartiției prin hexagoane regulate, fiecare dintre acestea putând fi împărțit în 6 triunghiuri), în spațiu o echipartiție prin tetraedre regulate nu există.





CRISTAL DE SEL
NaCl

PLANȘA VI

Dacă într-adevăr ne închipuim în spațiu un sistem de plane paralele cu fețele unui tetraedru regulat, obținem o rețea de puncte perfect izotropă, identică de altfel cu rețeaua cuboctaedrică a centrelor sferelor tangente, dar nicidecum echipartiția prin volume egale[4].

Aceste probleme de echipartiții ale planului și ale spațiului apar îndeobște în cristalografie și în teoria grupurilor de simetrie, ca și în arta decorativă.

În cristalografie, de pildă, există 17 diviziuni regulate și semiregulate ale planului, 17 feluri de a grupa motive regulate, repetate într-un plan (este aceeași problemă), 17 tipuri de simetrie plană.

După toate aceste digresiuni poate că a sosit timpul să prezentăm numerele cuboctaedrice centrate; ele formează șirul

$$1, 33, 55, 147, 309, 561, 923 \ldots 1 + \frac{(n-1)(10n^2 - 5n + 6)}{3}.$$

Gnomonii sau diferențele prime sunt 12, 42, 92, 162, 252, 362 ...

Diferențele secunde sunt 30, 50, 70, 90, 110 ... cu diferențe de rangul trei constante 20, 20, 20, 20 ...

Să remarcăm că al treilea gnomon, 92, care reprezintă și numărul de sfere tangente în al treilea strat concentric al îmbinării de sfere tangente egale în jurul unei sfere centrale, coincide cu numărul de electroni exteriori care se rotesc în jurul nucleului din atomul ultimului element natural (uraniu) din tabelul periodic al lui Mendeleev.

Planșa VII înfățișează două diagrame privitoare la sistemul cuboctaedric însuși, îmbinarea a șapte cercuri egale, tangente, centrul de creștere a numerelor hexagonale centrate și al rețelei hexagonale în plan și îmbinarea a 13 sfere egale, tangente (centrele coincizând cu vârfurile și cu centrul unui cuboctaedru), centru de creștere a numerelor cuboctaedrice centrate.

Cititorul a putut remarca o anumită analogie între proprietățile gnomonilor, sau diferențele prime ale numerelor figurate, și cele ale diferențialelor din calculul diferențial propriu-zis. De fapt, teoria pitagoreică a numerelor figurate și a creșterilor lor (gnomonii sau diferențe prime) poate fi legată de calculul modern al diferențelor întregi, folosit în construirea anumitor mașini de calculat și, prin aceasta, de calculul diferențial.

Similitudinea cea mai evidentă este aceea că, așa cum în analiză derivata sau diferențiala de ordinul n a unei funcții de gradul n este o constantă și derivata de ordinul n + 1 este egală cu zero, tot așa în geometria gnomonică șirul diferențelor de ordinul n dintr-un șir cu creștere gnomonică crescătoare de numere solide cu n dimensiuni este un șir de numere egale, iar diferențele de ordinul n + 1 sunt egale cu zero.

De exemplu:

Numere dodecaedrale
(cu trei dimensiuni)

	1	20	84	220	455	816
Δ1 (gnomoni)	19	64	136	235	361	
Δ2	45	72	99	126		
Δ3	27	27	27			
Δ4	0	0				

Numere icosaedrale

	1	12	48	124	255	456
Δ1	11	36	76	131	201	
Δ2	25	40	55	70		
Δ3	15	15	15			
Δ4	0	0				

Dimpotrivă, prin numerele pentagonale (cu două dimensiuni) avem:

	1	5	12	12	35	51
Δ1	4	7	10	13	16	
Δ2	3	3	3	3		
Δ3	0	0	0			

Domeniul numerelor figurate se întinde, după cum s-a lăsat deja să se înțeleagă, la spațiile cu un număr oarecare de dimensiuni. Am semnalat faptul că triunghiul lui Pascal ne oferea, fără nici o altă manipulare, specificațiile hipersolidelor regulate din șirul triunghiular într-un spațiu cu patru sau cu n dimensiuni.

Al treilea rând orizontal din triunghiul lui Pascal modificat prin desființarea coloanei ce conține doar 1

1
2 1
3 3 1
4 6 4 1
5 10 10 5 1
6 15 20 15 6 1

reprezintă specificațiile triunghiului echilateral (spațiul cu două dimensiuni), adică 3 vârfuri (cu 0 dimensiuni), trei laturi (cu o dimensiune), un triunghi (cu două dimensiuni).

Al patrulea rând 4, 6, 4, 1 reprezintă tot specificațiile tetraedrului regulat (spațiul cu trei dimensiuni: 4 vârfuri, 6 laturi, 4 fețe un volum), al cincilea rând 5, 10, 10, 5, 1 specificațiile hiperpiramidei sau pentahedroidului regulat în spațiul cu patru dimensiuni (5 vârfuri, 10 laturi, 10 fețe triunghiulare, 5 tetraedre „frontiere", un hipervolum)·ș. a. m. d. Nu poate părea decât un joc al spiritului, pentru cei care nu cred în realitatea sau chiar în posibilitatea existenței logice a acestor hipersolide. De fapt, existența lor logică este tot atât de riguros dovedită ca și aceea a solidelor în geometria uzuală, cu trei dimensiuni, iar specificațiile date de triunghiul lui Pascal pentru hipersolidele din șirul triunghiular în hiperspații permit (după cum vom vedea într-un alt capitol) să se conceapă logic în toate detaliile lor și să se proiecteze în spațiul nostru hiperpiramide cu 4 sau n dimensiuni și chiar să se construiască o hiperpiramidă ale lui Pascal (cu 4 dimensiuni) care, la rândul ei, permite să se rezolve anumite probleme de combinări și să se ajungă progresiv la hiperpiramide ale lui Pascal cu un număr oarecare de dimensiuni și la problemele respective de combinări.

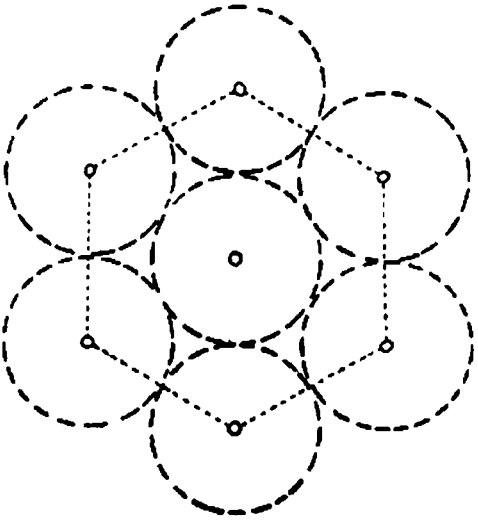
Această geometrie cu 4 sau n dimensiuni pe care mulți o cred neîndoielnic pur imaginară, dacă nu absurdă, se supune așadar unor reguli tot atât de precise ca geometria obișnuită; este stabilit, de exemplu, că tot așa cum în spațiul obișnuit cu trei dimensiuni nu pot exista decât 5 corpuri solide regulate, în spațiul cu 4 dimensiuni avem 6 hipersolide regulate care au ca „volume-frontieră" poliedre regulate. Acestea sunt:

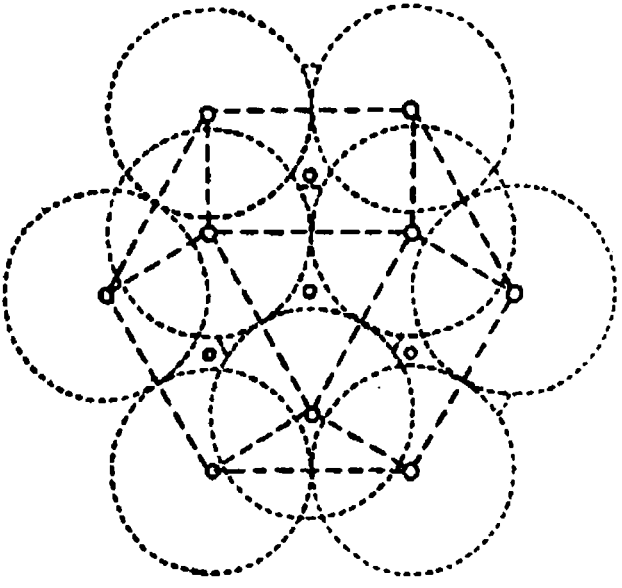
	Vârfuri	Muchii	Fețe	Celule-frontieră	Simboluri
Pentaedroidul sau Hiperpiramida	5	10	10 triunghiuri	5 tetraedre	C_5
Octaedroidul sau Hipercubul	16	32	24 pătrate	8 cuburi	C_8
Hexadecaedroidul	8	24	32 triunghiuri	16 tetraedre	C_{16}
Icosatetraedroidul	24	96	96 triunghiuri	24 octaedre	C_{24}
Hecatonicosaedroidul	600	1200	720 pentagoane	120 dodecaedre	C_{120}
Hecatosiedroidul	12	720	120 triunghiuri	600 tetraedre	C_{600}

Pentaedroidul nu are nici o legătură cu pentagonul; are 5 celule-frontieră care sunt tetraedre și aparține șirului triunghiular; octaedroidul n-are legătură directă cu octaedrul, însă are 8 cuburi ca celule-frontieră; acesta este numărul de celule-frontieră care apare în această terminologie și în simbolurile C_5, C_8 etc.

Face parte din familia pătratului și a cubului pe care-l reprezintă în cea de-a IV-a dimensiune. C_{16} corespunde șirului octaedrelor; C_{24} este un individualist, nu-și găsește locul în nici o filiație directă în ciuda afinității sale cu șirul triunghiular; C_{120} este reprezentantul seriei pentagon-dodecaedru în spațiul cu 4 dimensiuni, în sfârșit C_{600} reprezintă ramura pentagon-icosaedru în spațiul cu 4 dimensiuni.

Ne-am fi putut aștepta ca aceste 4 șiruri începute de perechile triunghi-tetraedru, pătrat-cub, pătrat-octaedru, pentagon-dodecaedru (chiar pentagon-icosaedru) să continue nedefinit, prin spațiile superioare, având reprezentanți în spațiile cu 5, 6, ... n dimensiuni; însă aici are loc o oprire misterioasă: șirurile care încep cu tetraedrul, cubul și octaedrul continuă nedefinit în cea de-a V-a dimensiune și dincolo, însă șirul pentagon-dodecaedru (sau icosaedru) se oprește brusc și nu mai apare în a V-a dimensiune, nici mai departe. Nu am văzut nicăieri vreo dovadă riguroasă a acestei afirmații, dar sunt de acord cu François Warrain și Donchian, cel mai mare specialist în spațiile cu 4 și mai multe dimensiuni, care a înfățișat la expoziția din Chicago modele din fire de aramă nu numai ale proiecțiilor în spațiul nostru al celor 6 politopi regulați specificați mai sus, ci și modele ale proiecțiilor în spațiul nostru ale hipercorpurilor din șirul cub – hipercub etc., care există în toate spațiile având între 4 și 24 de dimensiuni.



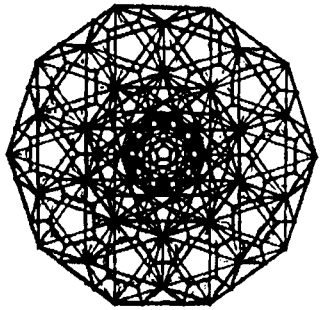


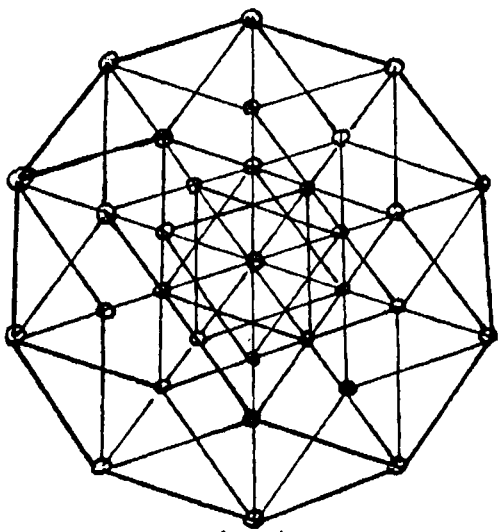
PLANȘA VII

În Palais de la Découverte sunt expuse și două modele din fire metalice ale proiecțiilor lui C_{120} și C_{600}. C_{120} este ultimul reprezentant oficial al pentagonului și al Secțiunii de Aur în spațiile multidimensionale, dat fiind că această familie se stinge după a IV-a dimensiune; dau aici (fig. 1, planșa VIII) o proiecție octogonală simetrică în plan a lui C_{120}, în care pentagonul, Secțiunea de Aur și decagonul se întrepătrund într-o rozetă cu desăvârșire euritmică. Dar, amănunt ciudat, cu toate că Secțiunea de Aur și pentagonul sau decagonul nu există în mod concret în politopii spațiilor cu mai mult de 4 dimensiuni, ei se găsesc, în mod paradoxal, în anumite proiecții ale acestor politopi în spațiul nostru sau în plan. De exemplu, figura 2, planșa VIII, rozetă acordată riguros cu Secțiunea de Aur într-o structură decagonală, reprezintă totodată o proiecție plană a hipercubului cu 5 dimensiuni și o față a proiecției în trei dimensiuni a hipercubului cu 14 dimensiuni[5]. Faptul că matematicianul sau mai degrabă geometrul care „vede în spațiu"[6] își poate închipui, poate vedea în imaginație aceste hipercorpuri sau cel puțin proiecțiilor lor, cititorului lipsit de antrenament îi pare mai mult decât ciudat; în parte este într-adevăr o chestiune de antrenament. În Statele Unite, arhitectul Claude Bragdon se folosea în mod practic de aceste proiecții de politopi în 3 sau 2 dimensiuni pentru motive de covoare sau de lămpi în formă de stea. (În afară de cei 6 politopi regulați, există într-adevăr în spațiul cu 4 dimensiuni 10 politopi regulați în formă de stea care corespund celor două dodecaedre în formă de stea din spațiul nostru.)

Drept corespondent al triunghiului lui Pascal, care ne îngăduie (după cum am văzut) să stabilim specificațiile șirului triunghiular de forme (triunghi, tetraedru, hiperpiramidă...) într-un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni, am alcătuit un tabel triunghiular care ne permite să stabilim o lege limpede de formare a hipercorpurilor din șirul pătrat, cub, hipercub etc., pentru un număr oarecare de dimensiuni. Acest tabel (tabelul I) arată, de asemenea, prezența universală a șirului triunghiular; coloanele verticale din triunghiul lui Pascal sunt, ca să zicem așa, perechi ale coloanelor puterilor succesive ale lui 2, reprezentând principiul Diadei.

În spațiul cu trei dimensiuni specificațiile cubului sunt date de cifrele 6 (fețe), 12 (laturi), 8 (vârfuri), din rândul al III-lea; în spațiul cu 4 dimensiuni rândul al IV-lea ne dă 8 celule (cuburi), 24 de fețe (pătrate), 32 (laturi), 16 (vârfuri). Prima cifră, 1, reprezintă chiar hipercubul.





Projection de l' Hypercube à 5 dimensions

PLANȘA VIII

Tabelul I. — Seria nedefinită de hipercuburi

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 1 = 2$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 2 = 4$ $\quad 2^2 \times 1 = 4$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 3 = 6$ $\quad 2^2 \times 3 = 12$ $\quad 2^3 \times 1 = 8$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 4 = 8$ $\quad 2^2 \times 6 = 24$ $\quad 2^3 \times 4 = 32$ $\quad 2^4 \times 1 = 16$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 5 = 10$ $\quad 2^2 \times 10 = 40$ $\quad 2^3 \times 10 = 80$ $\quad 2^4 \times 5 = 80$ $\quad 2^5 \times 1 = 32$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 6 = 12$ $\quad 2^2 \times 15 = 60$ $\quad 2^3 \times 20 = 160$ $\quad 2^4 \times 15 = 246$ $\quad 2^5 \times 6 = 192$ $\quad 2^6 \times 1 = 64$

. . . . . .

$$1, \frac{2n}{1}, \frac{2^2 n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{2^3 n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{2^4 n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots\ldots 2^n \times 1$$

Al $\overline{K+1}$-lea termen de rangul $\overline{N+1}$, dă 2^k multiplicat cu factorul $(n - k + 1)$, număr hiperpiramidal,

$$\frac{2^k \cdot n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)}{k!}$$

Tabelul II. — Specificații ale seriei nedefinite de hiperoctaedre

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

$2^2 = 4$ $\quad 2^1 \times 2 = 4$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

$2^3 = 8$ $\quad 2^2 \times 3 = 12$ $\quad 2^1 \times 3 = 6$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

$2^4 = 16$ $\quad 2^3 \times 4 = 32$ $\quad 2^2 \times 6 = 24$ $\quad 2^1 \times 4 = 8$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

$2^5 = 32$ $\quad 2^4 \times 5 = 80$ $\quad 2^3 \times 10 = 80$ $\quad 2^2 \times 10 = 40$ $\quad 2^1 \times 5 = 10$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

$2^6 = 64$ $\quad 2^5 \times 6 = 192$ $\quad 2^4 \times 15 = 240$ $\quad 2^3 \times 20 = 160$ $\quad 2^2 \times 15 = 60$ $\quad 2^1 \times 6 = 12$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

. . . . . .

$$2^n, \quad 2^{n-1} \cdot \frac{n}{1}, \quad 2^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \quad 2^{n-3} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots\ldots 2^{n-k} \cdot \frac{n(n-1)(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}, \quad 2n, \quad 1$$

Tabelul II dă specificațiile hiperoctaedrelor într-un spațiu oarecare. Cifrele sunt aceleași ca în tabelul I, însă inversate simetric; hipercuburile și hiperoctaedrele rămân reciproce în oricare spațiu, la fel cubul și octaedrul. Aceste trei tabele, triunghiul lui Pascal și tabelele I și II, dau, așadar, specificațiile *tuturor* corpurilor regulate posibile în oricare spațiu. (Este vorba, pentru moment, de spații euclidiene.)

Formula lui Schläfli pentru spațiul cu 4 dimensiuni este:

$$v - f + c - s = 0 \quad \text{sau} \quad v + c = f + s$$

literele v, f, c, s semnifică numărul de volume (celule-frontieră tridimensionale), fețe, laturi, vârfuri ale fiecărui politop.

Formula lui Schläfli:

$$\sum(k = 0, 1, 2, \ldots n)\ (-1)^k \times Ak = 1$$

se aplică în tabelele I și II (hipercuburi și hipertetraedre); atunci unitatea din stânga din fiecare rând din tabelul I reprezintă chiar politopul; pentru hiperoctaedre (tabelul II) politopul îl reprezintă $2^0 \times 1$ din diagonala din dreapta.

Într-un spațiu cu n dimensiuni hiperpiramida având ca specificații

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots, \frac{2^k n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \ldots,$$

specificațiile corespunzătoare ale hipercubului și ale hiperoctaedrului vor fi:

$$2^0, 2^1 \cdot \frac{n}{1}, 2^2 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \ldots 2^k \cdot \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \ldots 2^{n-1} \cdot \frac{n}{1}, 2^n$$

și

$$2^n, 2^{n-1}\,\frac{n}{1}, 2^{n-2}\,\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \ldots 2^1 \frac{n}{1}, 2^0 = 1$$

Ultimele două formule vor fi reciproce.

Să remarcăm că octaedrul s-a format din pătrat și nu din triunghi; două vârfuri se adaugă fiecărui spațiu pentru a obține hiperoctaedrul spațiului superior.

La originea poligoanelor regulate și a dezvoltării lor prin spațiile succesive se găsește, atât pentru triunghi, cât și pentru pătrat, o figură alcătuită din două puncte, un „bipol" format din două puncte și din linia care le unește (bipolul figurează în partea de sus a fiecărui

tabel). În realitate, celula primordială, „protozoarul" geometric, în spațiul cu 0 dimensiuni, este punctul 1 care umple acest spațiu. Aceste prime două elemente se găsesc și în șirul crescător cu circumferință, sferă etc., numai că în acest caz „sfera" cu o dimensiune este formată dintre două puncte *neunite* printr-o linie.

Pentru a trece de la „bipol" la corpul următor din șirul „triunghiular", este suficient să adăugăm un al treilea pol exterior „spațiului" cu o dimensiune și depărtat de fiecare din cele două puncte ale bipolului cu o lungime egală cu aceea a segmentului care le unește. Această construcție repetată căreia i se adaugă de fiecare dată un punct de ordinul (n + 1) sau pol situat în afara spațiului precedent, dă șirul infinit al hiperpiramidelor.

Dimpotrivă, șirul hipercuburilor se obține ducând de fiecare dată corpul ce corespunde spațiului cu 1, 2, 3 ... n dimensiuni (bipol, pătrat, hipercub = octahedroid[7]) ... într-o direcție perpendiculară pe toate dimensiunile spațiului său (introducând astfel a n + 1 dimensiune) cu o distanță egală cu lungimea segmentului inițial (al muchiei constante); obținem astfel noul corp sau hipercorp unind vârfurile corespunzătoare ale celui precedent înainte și după translația sa. (A se vedea mai departe planșa XIII, capitolul XI.) Pentru hiperoctaedru, legea de formare constă în a adăuga două vârfuri corpului precedent, aceste două vârfuri fiind situate pe o perpendiculară dusă în spațiul precedent prin centrul figurii corpului și simetric de o parte și de alta a acestui corp astfel încât să alcătuiască, după ce au fost unite cu toate vârfurile acestuia din urmă, noi muchii egale cu precedentele.

Am văzut că în spațiul cu 0 dimensiuni, punctul este monada geometrică, polul, oul absolut din care decurg nu numai numerele, ci și formele reprezentate de Numerele Figurate.

Vom vedea într-un alt capitol că teoria acestor Numere Figurate imaginată de pitagoreici permite nu numai aceste plonjări în hiperspațiu, ci și rezolvarea logică și „în mod figurativ" a numeroase probleme din teoria combinărilor.

NOTE

[1] Acest cuvânt vine de la Al. Khowarazmi (matematician arab din secolul IX, autor al *Algebrarului*, „transpunere"); el înseamnă acum: orice procedeu matematic constând în a

trece de la un eșalon la următorul printr-o iterație nedefinită. În ciuda afinității fonetice cu ritmul și logaritmul (a cărui anagramă este) nu este în nici un fel înrudit cu ele.

[2] Formula lui Schläfli sau formula lui Euler generalizată pentru un spațiu cu n dimensiuni divine

$$\sum(k = 1, 2, 3 \ldots n)\,(-1)^k \times A^k = 1$$

A^k reprezentând numărul de elemente cu k dimensiuni.

$A^n = 1$ este chiar politopul, A^o numărul vârfurilor, $(-1)^o = 1$.

[3] De fapt, hexagonul este reprezentat în spațiul cu trei dimensiuni prin trei corpuri solide înrudite.

1° Cuboctaedrul (moștenește de la hexagon proprietatea relativă la egalitatea între baza circumferinței circumscrise și latura hexagonului).

2° Poliedrul semiregulat al lui Kelvin (24 de vârfuri, 36 de muchii, 14 fețe dintre care 8 sunt hexagoane și 6 pătrate, obținut împărțind în trei segmente egale fiecare muchie a octaedrului și urmând între ele punctele astfel obținute).

Acest corp moștenește de la hexagon proprietatea de a umple planul (aici spațiul) fără interstiții.

3° Prisma hexagonală regulată (două fețe hexagonale paralele, șase fețe pătrate cu aceeași latură), moștenește aceeași proprietate de la hexagon, adică formează o echipartiție perfectă a spațiului.

[4] Dimpotrivă, în geometria neeuclidiană a lui Riemann, spațiul poate fi umplut fără interstiții cu tetraede regulate.

[5] Această prezență neașteptată a Secțiunii de Aur și a pentagonului sau decagonului se datorează faptului că deja în spațiul cu trei dimensiuni Secțiunea de Aur unește nu numai dodecaedrul și icosaedrul, ci le unește cu celelalte trei poliedre regulate după cum enunțase Campanus din Navara în secolul al XII-lea.

[6] Aceia dintre cititorii mei care au studiat geometria descriptivă își amintesc că erau două categorii de elevi, cei care „vedeau în spațiu și își puteau închipui soluția unei probleme de intersecții de solide" și cei care „nu vedeau în spațiu" și preferau să găsească aceste soluții prin formule de analize.

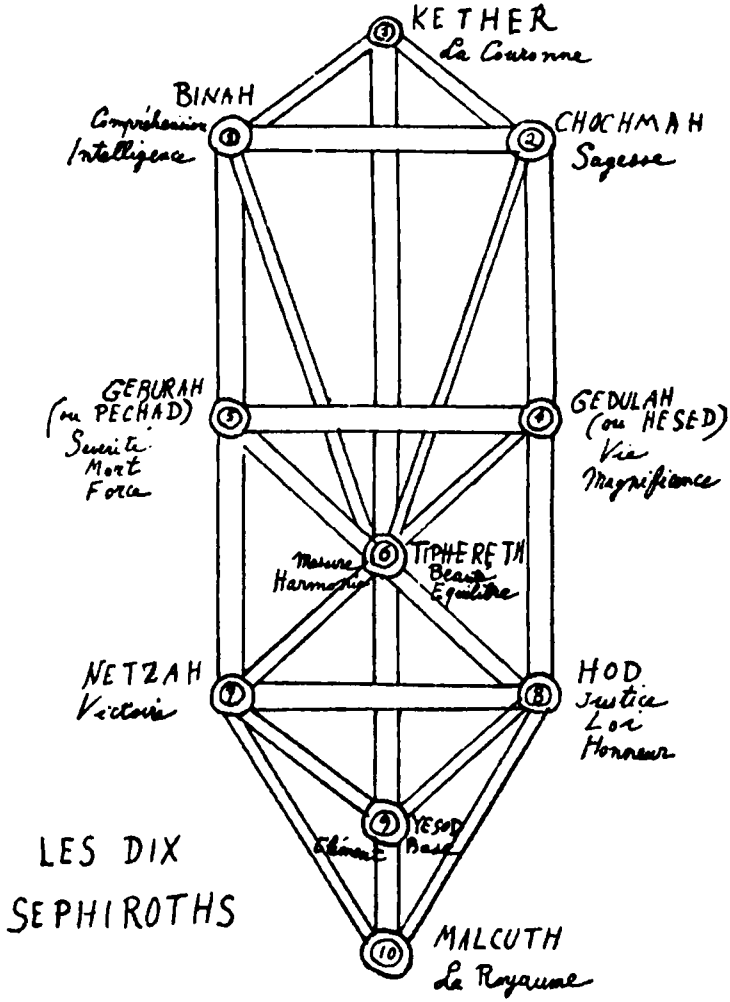
[7] O anumită confuzie rezultă din faptul că hipercubul C_8 este numit oficial octaedroid din cauza celor 8 celule ale sale (cuburi), fără să fie din familia octaedrului, hiperoctaedrului (C_{16}) etc.

CAPITOLUL VII

CABALA ȘI NUMERELE – INFLUENȚA PITAGORISMULUI ASUPRA GÂNDIRII CREȘTINE ȘI EBRAICE – CABALĂ, GNOZĂ ȘI MAGIE – PENTACLURI, FAUST, AGRIPPA ȘI PARACELSUS

Moartea este o sărutare de la Dumnezeu.
(ZOHARUL)

În religia vechiului Egipt și în magia rituală, care îi era asociată, era atribuită o virtute magică nu atât numerelor, cât cuvintelor; am vorbit despre aceste „cuvinte încărcate de puteri" (cuvinte de trecere (parole *n.trad.*), cuvinte talisman, cuvinte de vrajă, cuvinte care ucid) în cartea mea *Numărul de Aur*. Dimpotrivă, în Biblie și în tradiția ebraică, în Caldeea, mistica numerelor o domină pe aceea a cuvintelor, iar numerele Șapte (cele șapte zile ale Creației, cele șapte plăgi ale Egiptului, cele șapte vaci slabe, cele șapte brațe ale sfeșnicului ritual), Zece (tablele Legii) și Doisprezece (cele douăsprezece triburi etc.) au atribute mistice asemănătoare celor ale numerelor divine pitagoreice, numai că aici este vorba mai degrabă de venerație sau de teamă superstițioasă decât de contemplație metafizică, de evocare de arhetipuri. Însemnătatea acordată de Biblie anumitor numere se pare că este datorată influenței caldeene primitive, apoi celei a captivității babiloniene. Dar în afara acestor influențe și contagiuni firești, gândirea evreiască, în epoca alexandrină a reînnoirii pitagoreice (cuprinzând cele șase veacuri care încadrează simetric începutul erei noastre), a fost puternic înrâurită de magia egipteană a cuvintelor pe de o parte, de mistica pitagoreică a numerelor pe de alta, și a alcătuit „corpusul" compact de mistică a cuvintelor, a literelor și a numerelor, amestec de știință, de magie și de numerologie superstițioasă care este Cabala ebraică. Cuvântul Quabalah înseamnă totodată receptare și transmitere *(Șalșelet ha-kabala,* „lanțul Tradiției"); dată fiind puternica influență pitagoreică pe care tocmai am arătat-o nu vom fi mirați dacă vom


KETHER
La Couronne
BINAH
Compréhension
Intelligence
CHOCHMAH
Sagesse
GEBURAH
(ou PECHAD)
Sévérité
Mort
Force
GEDULAH
(ou HESED)
Vie
Magnificence
Mesure
Harmonie
TIPHERETH
Beauté
Equilibre
NETZAH
Victoire
HOD
Justice
Loi
Honneur
YESOD
Fondement
Base
MALCUTH
La Royaume
LES DIX
SEPHIROTHS

PLANȘA IX

întâlni în simbolurile principale ale Cabalei un Tetraktys stabilit pe literele numelui Dumnezeului Incomunicabil (Tetragrama, silabisită *Jod He Vau He*, transformat uneori, sub influența gnostică în Pentagrammaton Jod He Shin Vau He, *Jehoshuah* pentru Iisus) și o Decadă, Decada Sefirotică, lanț sau arbore al sefiroților, sau „Noțiuni ale lui Dumnezeu prin Numere", care pe calea celor 72 nume divine alcătuite cu cele 22 de „litere-căi" și cele 50 de porți (Sefiroți sau Decada multiplicată cu Cinci) ne fac să trecem prin „Schemoths" (cunoașteri prin nume) de la „Schema" (Numele Incomunicabil) la Schema Hamphorarsh, numele *explicat* de En-Sof, bătrânul Vârstelor sau Ființa Absolută. Cei Zece Sefiroți (singular: o Sefirah, de la *Sapheir*, a socoti, a număra) au fiecare un nume și un număr (vezi planșa IX). Lumea materială are și ea 10 Sefiroți, avându-l regent pe demonul Sammael. Printre ei, Tohu este cel fără formă și Bohu cel Gol (de unde *tohu-bohu*)[1]. Între Sefiroții spirituali, al zecelea este Malkuth, Regatul; Numărul Zece este într-adevăr tot atât de important în Cabală ca și în Mistica pitagoreică și noi am văzut că el corespunde literei Yod sau G aspirat, transmis încă din îndepărtatul Ev Mediu pentaclurilor magicienilor, apoi centrului Stelei Învăpăiate a Masonilor Operativi și Francmasonilor, stea provenită și ea, cu o parte din ritual, din pentagrama pitagoreicilor. O ramură a Cabalei practice este *Gematria*, prin care valoarea numerică a literelor duce la dezvăluirea unor importante mistere cuprinse în numele ființelor; fiica bastardă a Gematriei este Numerologia, care mai bântuie și în zilele noastre.

Cartea esențială a Înaltei Cabale (nu cea a Numerologiei pseudoștiințifice care, în general, i se substituie) este numită *Zoharul*; este atribuită rabinului Șimeon ben Yo'hai (secolul al II-lea d. Hr.) și se pare că până la urmă a fost redactată de Moise ben Șemtov de Leon (sec. al XIII-lea). A fost tipărită la Mantua și la Cremona (1558 și 1560). Cele 72 de lame ale Tarotului (72° este între altele unghiul care subîntinde laturii pentagonului) fac și ele parte din progenitura sulfuroasă a Cabalei.

Iată un citat din *Zohar* (cartea Splendorii), care reflectă îmbinarea ei cu idei neoplatoniciene, datând din epoca alexandrină: „Află că aceste palate cerești sunt lumină pură, nu sunt nici spirite, nici suflete, nici vreo altă formă care să poată fi percepută prin simțuri. Află că Palatele sunt: Gândirea întrevăzută prin văl. Ridică vălul și întreaga materie ți se dezvăluie imaterială".

Eddington și Heisenberg au ridicat vălul și materia s-a imaterializat într-adevăr în „unde de cunoaștere".

Zoharul pomenește și de „Microcosmos": „când Puterea divină își alcătuiește un centru, ea creează un univers nou, microcosmosul.

Și mai departe, un ecou din „Tabula Smaragdina" a lui Thot Hermes și din Vitruviu:

„Forma Omului rezumă toate formele, atât ale lucrurilor superioare, cât și ale lucrurilor inferioare. Deoarece această formă rezumă tot ceea ce este, ne folosim de ea pentru a-l reprezenta pe Dumnezeu sub forma Bătrânului Suprem (En-Sof). Lumea superioară fecundează lumea inferioară atunci când omul, mijlocitor între gândire și formă, găsește în cele din urmă armonia... Tot ceea ce există este un corp animat de un singur suflet."

Pe lângă această influență a pitagorismului asupra gândirii ebraice[2] și asupra formării Cabalei, trebuie să amintim teza interesantă a lui Isidore Lévy, despre rolul pitagorismului în dezvoltarea eticii creștine. Influența pitagorismului și a formei sale ebraice, Cabala, asupra redactării textelor zise „Ioanite" (Evanghelia a IV-a și Apocalipsa) a fost deseori remarcată (Numărul fiarei, 666, corespunde în transcriere alfabetică lui Nero Caesar, numărul peștilor pescuitului miraculos, 153, este al șaptesprezecelea număr triunghiular)[3], de asemenea, cea a comunităților protomonastice de disciplină pitagoreică (Terapeuți) asupra monahismului creștin din pustiu. Dar după Isidore Lévy, chiar etica lui Hristos, întemeiată pe iubire și cu totul diferită de rigoarea mozaică, ar fi fost inspirată de pitagorismul asociat neoplatonismului dominant în Asia Mică și la Alexandria și ale cărui rădăcini adânci în Roma Imperială au fost scoase la iveală de Cumont și Carcopino. Așa s-ar explica succesul imediat și paradoxal al acestei noi religii întemeiate pe iubire, tot așa cum au fost pitagorismul primitiv și panteismul confuz în care acesta se transformase. Așa cum scrie Isidor Lévy:

„În acest fel se explică faptul enigmatic al triumfului Creștinismului. Cum să înțelegem că o doctrină elaborată în Iudeea la sfârșitul unei evoluții religioase întru totul singulare să poată oferi o hrană potrivită nevoilor spirituale ale societății greco-romane? Răspunsul este lesne de dat pentru cel care a observat filiația care unește elenismul platonizant cu iudaismul din Alexandria, apoi din Iudeea și cu Evanghelia. Esențialul din religia care s-a ivit din Palestina în vremea cezarilor nu pătrunsese în Ieruaslim decât cu un

secol mai devreme. Evanghelia a vrăjit lumea antică întrucât îi aducea, îmbibat de cel mai pătrunzător farmec exotic, un produs al gândirii grecești, moștenitoare a unui îndepărtat trecut indo-european.

De altfel, această teză a fost reluată în mod independent de Simone Weil.

Cabala, Gnoza și Magia își amestecau doctrinele și superstițiile pe terenul predestinat al vechiului pământ al faraonilor, unde înflorea și hermetismul plasat sub oblăduirea unui misterior Hermes Trismegistul, moștenitor al ezoterismului egiptean de altădată și reîncarnare al lui Hermes Thot, scrib al zeilor și călăuză a sufletelor în lumea de dincolo.

Diagrame geometrice și numere talismanice se transmiteau în curente paralele sau împreunate, cărora li se alătura filiera corporațiilor de constructori, călăuzite tot timpul de jurământul secretului profesional și care mai păstrau anumite taine matematice moștenite de la Marea Confrerie din Sicilia. În curând, după ce Alchimia, ivită ca și Cabala din pământ alexandrin, se va alătura celorlalte discipline secrete, fluviul ocult își va continua cursul subteran de-a lungul Evului Mediu, iar în secolul al XVI-lea va apărea aproape la lumina zilei „Magia științifică" a lui Agrippa, Paracelsus și John Dee. Este de ajuns să citâm câteva extrase din scrierile lor pentru a regăsi, încă vii, ecourile tradiției și misticii pitagoreice amestecate cu reziduurile și divagațiile alchimiștilor și ale Magiei Negre sau Albe[4].

Agrippa de Nettesheim, elev al unui celebru erudit în științe oculte, abatele Trithemius, și-a publicat *De Occulta Philosophia* la Anvers, în 1530. O parte însemnată a acestui tratat de magie este alcătuită dintr-o carte despre Cabală în care e izbitoare influența ideilor pitagoreice, ale lui Platon și Nicomachos din Gerasa (prin Boethius). Iată câteva extrase:

„Științele Matematice, ca rude ale magiei, sunt atât de indispensabile acesteia, încât acela care, fără să le cunoască, crede că poate practica artele magice, se pomenește pe o cale întru totul greșită, se străduiește de pomană și nu ajunge niciodată la vreun rezultat. Căci tot ceea ce poate exista ca forțe ale firii care pot fi stăpânite nu sunt până la urmă decât Numere, Greutăți, Măsuri, Armonie, mișcare și lumină și depinde de acești factori."

Agrippa se mărginește cu modestie la forțele naturale; forțele psihice, care nu sunt încă integrate în știința de astăzi, își pot găsi locul în expunerea sa. Metapsihica zilelor noastre se ocupă cu condensarea, eliberarea, folosirea, aplicarea într-o direcție

determinată a energiei de esență spirituală, care depinde uneori de un centru sau de niște rezervoare vii ce pot fi sau nu transcendente, dar pot câteodată să fie alcătuite din psihisme colective care comunică între ele fără știrea conștiințelor lor individuale. Dacă este vorba să comunicăm cu energii psihice dezincarnate, intrăm într-o ramură a magiei pe care o putem numi în bloc „ocultism". Însă pentru magicienii secolului al XVI-lea vechile simboluri și-au păstrat valoarea incantatorie sau dinamică; diagramele geometrice, chiar pentagrama [înfățișată de Agrippa ca un contur al omului-microcosmos[5]] sau „pentaclul" magic prin excelență, apar în primul plan. Să-l mai citățm pe Agrippa:

„Încă de acum, fiind alcătuită din primul număr par feminin și din primul număr impar masculin, pentada are o perfecțiune și o putere remarcabile; în plus ea este jumătatea decadei, a numărului-tot ... A fost la pitagoreici Numărul Căsătoriei ... este și numărul fericirii și al grației, pecetea Sfântului Duh, legătura care înlănțuie tot; ... filosofii păgâni așezau pentada tot atât de sus deasupra Tetradei pe cât ceea ce este însuflețit domină ceea ce este neînsuflețit ... Boethius spune: „Tot ceea ce, de la începutul lucrurilor, a fost zămislit de Natură pare alcătuit după relații numerice, ieșite din Înțelepciunea Creatorului[6]". „Numerele sunt în cele mai simple și mai strânse legături cu ideile Înțelegerii Divine... Puterile de care se bucură Numerele în Natura vie nu constau în numele numerelor, nici în numerele folosite pentru a ține socoteli, ci în numerele puterii de înțelegere, formale și naturale ... Cel care va izbuti să pună în legătură numerele uzuale și naturale cu numerele divine va înfăptui miracole prin Numere".

Ne gândim la întreaga teorie a energiei atomice ieșită din formula lui Einstein, $E = mc^2$ (E – energie, m – masă, c – viteza luminii) și nu ne mai mirăm că Descartes l-a luat în serios pe acest magician foarte rezonabil.

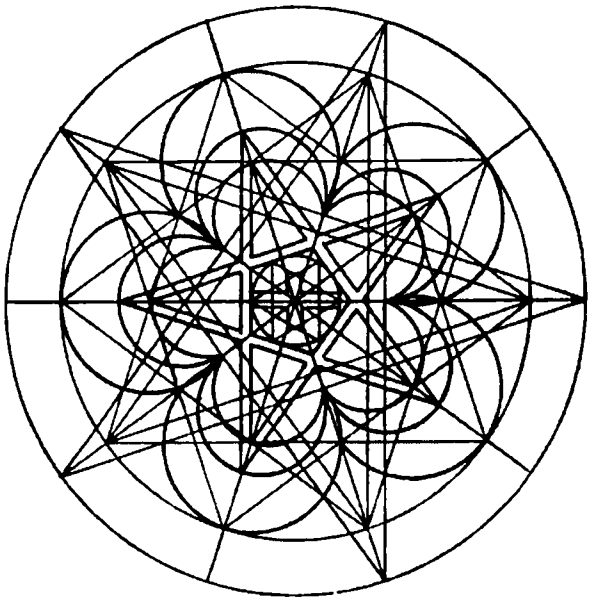
Paracelsus (Theophraste-Bombastus[7] de Hohenheim, 1493–1541) declară că toate semnele de care ascultă spiritele se reduc la două: Macrocosmosul materiei (*Natura Naturata*) sau Pecetea lui Solomon (hexagrama) și „semnul cel mai puternic dintre toate, cel al Microcosmosului sau pentagrama" (Macrocosmosul spiritual sau *Numărul Tot* este reprezentat de Decagonul în formă de stea).

Să menționăm aici că simetria hexagonală pare într-adevăr dominantă în *natura naturata* pasivă a cristalelor, iar pentagrama, sau mai degrabă simetria pentagonală, în morfologia ființelor vii. Un alt magician, contemporan cu Elisabeta a Angliei și cu Rudolf al

II-lea, celebrul John Dee, se exprimă în termeni asemănători. În sfârșit, în secolul al XVII-lea îl vedem pe părintele omnivor Athanase Kircher citând și el din Pentalpha și Hexalpha (pentagrame și hexagrame alcătuite din cinci sau șase litere A împletite); el amintește în legătură cu cea dintâi că este vorba de simbolul pitagoreic al armoniei și al sănătății pe care Antiohus l-a văzut în vis pe *vexillum*-ul lui Alexandru. Într-un alt capitol (*De Cabbala Pythagorica*), savantul iezuit vorbește despre misteriosul Tetraktys al lui Pythagoras, despre Decadă (Numărul armoniei desăvârșit între toate) și despre cei zece Sefiroți; se întoarce la Pentadă:

Mirum igitur non est, Pythagoreos tantum virtuti tribuisse Quinario, ut eius ope compositionem animae deprehenderent.

Iar în legătură cu atribuirea Senarului (Numărul Șase) lumii anorganice, el este la fel de categoric: ... *ita et Senarius omnem materialem cognitionem dispertiendam numerandamque assumit.*



PLANȘA X

Să nu uităm tratatele de „știință neagră" atribuite celebrului Dr. Faust [precum *Höllenzwang* și „Cabala Nigra et Alba" – Passau, 1604 – despre care se pretinde că sunt scrise de mâna sa și vorbesc despre legăturile sale cu unul din cei șapte prinți ai infernului; Mefistofeles sau Mefistofiel[8]].

Dr. Faust a existat cu adevărat și a operat mai ales în Boemia, patria favortiă a ocultismului și a fantasticului, a lui Rabbi Loëw și a Golemului, în care strada Alchimiștilor mai există și acum de-a lungul zidurilor Hradschin-ului.

Un caz ciudat de convergență ne înfățișează, într-un roman gnostic din secolul al II-lea sau al III-lea d.Hr., pe un anume Faustus, tovarăș al lui Simon Magel (*Le problème littéraire et historique du roman pseudo-Clémentin*, Oscar Cullman, ed. F. Alcan).

Am mai întâlnit până acum principiul analogiei al lui Pythagoras, scos din *Hieros Logos* („Natura este întotdeauna asemănătoare sieși"); Cabala nu a lăsat să-i scape un îndemn atât de încurajator de a jongla cu simbolurile și l-a adoptat. În amalgamul Cabală – Gnoză – Hermetism el se ivește într-un distih care subliniază corelația analogică macrocosmos-microcosmos.

Id quod inferius
Sicut quod superius

(împrumutat din „Tabula Smaragdina" a lui Hermes Trismegistul).

Alchimiștii, Roza-Crucienii, Magicienii din Renaștere au adoptat la rândul lor acest distih drept formulă și program, reprezentând pentru cei dintâi, în mod cu totul deosebit, simbolul corelațiilor fizice și psihice între principiul masculin („Leul Roșu") și principiul feminin (*Înger*), Yod și He, combinate în Alkaest.

Această revenire la suprafață a vechiului pitagorism pe căile suspecte ale ocultismului și ale magiei coincide, de altfel, cu dezvăluirea celor mai importante secrete ale sale în cartea lui Luca Pacioli și cu întemeierea academiilor platoniciene, pentru care cea a lui Cosimo de Medicis, de la Florența a constituit prototipul (întemeiată în 1442 și având printre alți membri pe Marsilio Ficino, Pico della Mirandola, Alberti și Plethon).

Puțin mai târziu, Reforma a dat o lovitură de moarte ghildelor zidarilor și tăietorilor de piatră și secretului, păstrat până atunci cu strășnicie, al planurilor de construcție și al felului în care proporția le controla *symmetria* (în sensul vitruvian al cuvântului).

Descendența spirituală a lui Agrippa nu s-a stins, planșa X reprezintă steaua în cinci colțuri a unui magician modern influențat de simbolismul roza-crucian.

NOTE

[1] În limba franceză expresia *tohu-bohu* are următoarele sensuri: 1° stare a pământului în haosul primitiv; 2° dezordine, harababură, hărmălaie *(n.t.)*.

[2] „Cucerirea iudaismului de către doctrina pitagoreică a început cu mult înaintea Epocii romane. Toate realizările însemnate ale literaturii evreiești din Alexandria romană sunt legate de tendința pitagoreizantă" (Isidore Lévy, *La légende de Pythagore*). Și: „Iudaismul alexandrin, fariseismul ... și esenismul oferă, în comparație cu mozaismul biblic, caractere noi, semne ale cuceririi lumii evreiești de către concepțiile a căror expresie narativă și mijloc de vehiculare a fost legenda lui Pitagora." *(Id.)*

[3] Conform formulei generale

$$\frac{n(n+1)}{2}, \text{ aici } \frac{16 \times 17}{2} = 153 \text{ (remarcat de Robert Eisler).}$$

[4] Magia Neagră sau *Goeția* cheamă demonii și alte spirite malefice în nădejdea de a le da în robie, prin *Necromanție*, sufletele morților; slujba neagră face parte din ritualul Goeției. Magia Albă sau Theurgia nu are legături decât cu spiritele binevoitoare sau cu forțele naturale. Definiția *lato-sensu* a Magiei: tot ceea ce eliberează o forță sau o captează. O operație dinamică, captare sau emitere controlată de forțe, este întotdeauna magică... pentru cei care nu o înțeleg. Deseori magia de astăzi este știința de mâine. Ritul, încantația, ritmul joacă un rol important în magie (vezi *Les Rites ne sont que la mise en action des Symboles*, Comte de Larmandie.)

[5] Cuvântul „microcosmos" este întâlnit pentru prima dată într-un text de Democrit din Aldera. Totuși, o biografie grecească a lui Pitagora îi atribuie născocirea cuvintelor macrocosmos și microcosmos, și a frazei Ὁ ἄνθρωπος μίκρος κόσμος λέγεται.

[6] Aceasta era și părerea Sfântului Augustin pe care o aplica în mod deosebit Esteticii: „Rațiunea, întorcându-se spre domeniul Vederii adică Pământul și Cerul, bagă de seamă că în lume frumusețea place vederii, în frumusețe formele, în forme măsurile, în măsuri numerele." *(De Ordine)*

[7] De unde adjectivul „bombastic". Paracelsyus nu a meritat acest epitet căci se pare că a fost și un mare medic. Terapeutica lui era bazată pe o teorie „armonică" a fiziologiei (asemănătoare cu aceea a lui Platon), orice stare patologică fiind cauzată, după părerea lui, de o ruptură de armonie, de o „disonanță". Aparatul american de diagnosticat, bazat pe observarea radiațiilor corpului omenesc, a diferitelor sale organe și a frecvențelor lor, precum și metoda de tratament corespunzătoare se întemeiază pe același principiu.

[8] Ultim ovator al lui Hermes–Thot, sau Mercur cu caduceul (ὄφις, șarpe) prin mijlocirea nebulosului Hermes Trismegistul (tris Megistos, Megist Ophiel, Mephistophels) Agrippa numește spiritul lui Marcus Ophiel și atât.

CAPITOLUL VIII

AVATARELE PENTAGRAMEI – CORPORAȚIILE DE CONSTRUCTORI – TRANSMITEREA PLANURILOR DE CONSTRUCȚIE – SOCIETĂȚILE SECRETE CHINEZEȘTI – CONCEPȚIA CHINEZEASCĂ DESPRE NUMĂR: PERMUTĂRI ȘI COMBINĂRI – „CARTEA TRANSFORMĂRILOR"

Veder voleva come si convenne
L'imago al cerchio, et come vi s'indova.
(DANTE, Paradiso)

Am amintit câteva dintre căile tăinuite prin care s-au transmis de-a lungul vremurilor mistica pitagoreică a numerelor, simbolurile, talismanele și chiar superstițiile ei. Șirului obscur de alchimiști, cabaliști, rozacrucieni și magicieni trebuie să-i adăugăm și pe aceia care au transmis planurile de construcție ale arhitecților și maeștilor zidari și secretele lor, care nu sunt decât secretele geometrice ale pitagoreicilor, care au pricinuit excomunicarea lui Hipocrates din Chios și lui Hippasos.

Cu toate că arhitecții au fost mai discreți decât practicanții magiei negre sau albe, putem oricum stabili o filieră neîntreruptă, începând cu corporațiile grecești de constructori, continuând cu cele romane (*Collegia Opificum*), care au rezistat prin vremurile întunecate ale invaziilor barbare până în perioada caroliginană, cu corporațiile bizantine, cu atelierele mânăstirești din marile abații carolingiene (Cluny, Corvey, Saint-Gall, Monte-Cassino etc.), în sfârșit cu ghildele de arhitecți și zidari din Evul Mediu, culminând cu Marea Federație a zidarilor și tăietorilor în piatră care asculta de Marea Lojă a Catedralei din Strasbourg.

Ghildele de constructori, masoni operativi din Evul Mediu, erau, ca și *Collegia* antice, societăți secrete în care se transmiteau de la maestru la inițiat atât secrete profesionale cât și rituale. Aceasta reiese din câteva documente sau regulamente (foarte puține) care din întâmplare n-au fost distruse, ci au fost adunate, mai ales în Anglia, la British Museum, sau în lojele masonice speculative (cele

ale francmasoneriei „Filosofice", întemeiată la Londra în 1717, care a împrumutat în mare parte ritualul și simbolurile lojelor operative). Documentele asociației „Bauhütte" (Federația lojelor de constructori din Sfântul Imperiu) menționează, pe lângă semne lapidare (semnăturile în piatră ale maeștrilor masoni semnături care prezintă o geometrie înrudită cu aceea a planurilor de construcție însă bazată pe pătrat și pe triunghi și nu pe pentagon), mijloacele de recunoaștere, parolele, gesturile, etc.[1], precum și secretele profesionale (*Heimlichkeiten*, dintre care cel mai important era *Grund*-ul sau arta traseelor) pe care și le transmiteau maeștrii arhitecți din generație în generație, în paralel cu confrații lor din Franța și Anglia. În Manuscrisul „Regius" sau *Poemul Masonic* de la British Museum, care datează de la sfârșitul secolului al XIV-lea, se găsește pasajul următor privitor la secretul maestrului pe care trebuie să-l respecte întocmai ucenicul și companionul:

„Tainele Camerei Maestrului nu vor fi încredințate nimănui, nici ceea ce vei fi făcut tu în lojă, orice vei auzi sau vei vedea nu spune nimănui, oriunde te-ai duce".

În Manuscrisul Cooke, care se găsește la British Museum și este o copie de prin anii 1430–1440 a unui text de la sfârșitul secolului al XIV-lea, se spune despre Pythagoras că ar fi descoperit una din coloanele pe care fuseseră gravate principiile artei de a construi (cealaltă coloană a fost găsită de Hermes):

„Masonul *va păstra secretul* companionilor atât cu privire la lojă, cât și la casa particulară și la orice loc în care se găsesc masonii. El nu va trăda Arta masonică."

Într-un alt manuscris (mss. nr. 2 al Marii Loji din Londra) se poate citi:

„Veți păstra în mare taină punctele cele mai obscure și mai complicate ale științei voastre, nedestăinuindu-le nimănui dintre cei ce nu le studiază și folosesc".

Găsim același lucru în Manuscrisul William Watson, un rulou de pergament lung de douăsprezece picioare, care datează din ultima treime a veacului al XV-lea. Anexa la manuscrisul Harleian nr. 2024, din jurul anului 1650, precizează:

„Vi se vor dezvălui mai multe cuvinte și semne ale unui mason liber de care veți fi făcuți răspunzători în fața lui Dumnezeu în marea și înfricoșătoarea zi a judecății, trebuind să le păstrați în taină și să nu le destăinuiți nimănui".

Confreria din Sicilia nu era, nici ea, mai puțin exigentă. Printre simbolurile moștenite prin tradiția *Collegiilor* antice se află, de altfel, indestructibila pentagramă sub forma „Stelei înflăcărate", având în centru litera G, care reprezintă *Yod*-ul ebraic și Decada; ritualul propriu-zis provine, totodată, din ritualul pitagoreic și din cel al Misterelor din Eleusis, cu unele reminiscențe egiptene încă și mai vechi. Aceste afinități și legături evidente între meșterii greci și Confreria pitagoreică se explică prin faptul că corpusul matematic de teorii ale proporției, ale simetriei și ale euritmiei folosite de arhitecții din marea epocă greacă era împrumutat direct de la disciplinele matematice ale Confreriei, după cum putem ușor vedea în Vitruviu[2]. Ecoul lor direct se găsește într-o frază a lui Campanus de Novara (din secolul al XIII-lea), prin care subliniază felul în care „Secțiunea de Aur" leagă în mod logic (*rationabiliter*) cele cinci solide platoniciene printr-o simfonie irațională (*irrationali symphonia*), adică printr-o proporție sau printr-un șir de proporții iraționale.

Am examinat în amănunt mecanismele acestor transmiteri de-a lungul secolelor în mai multe lucrări, îndeosebi în *Numărul de aur*, pe care am mai menționat-o, iar acum nu mă voi mai opri asupra acestui subiect decât pentru a menționa analiza planurilor de construcție gotice făcută de arhitectul german Moessel, care le-a redus la câteva diagrame fundamentale bazate pe pantagonul și decagonul regulat și deci, firesc, pe Secțiunea de Aur. Pentru arhitectura grecească pare să fi fost normală folosirea dreptunghiurilor „dinamice" ale lui Hambidge și se pare că dintre aceste drepunghiuri cele care au dat cea mai mare parte a planurilor au fost „dreptunghiul de aur" și dreptunghiurile $\sqrt{5}$ și $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (acesta din urmă fiind caracteristic pentru proporțiile corpului omenesc). Diagramele circulare de tip „Moessel" apar, dimpotrivă, în alcătuirea multor tablouri din Renaștere (Rafael); în zilele noastre s-a folosit de acestea regretatul Jean Puiforcat (statuia lui Descartes din Haga etc.).

Ceea ce am putea numi pitagorism monastic sau neoplatonism benedictin a înflorit și în Evul Mediu, după cum putem vedea din tratatul *De mundi universitate sine Megacosmos et Microcosmos*, de Bernard Sylvestre; călugărița benedictină Hildegarde din Bingen (1098–1179), stareța din Rupertsberg (Sfânta Hildegarde), ne descrie în cartea sa, *Sci vias*, viziunile cosmogonice în care

„*Nous-ul*" (Sufletul lumii) sau Macrocosmosul spiritual, întrepătrunde, domină și armonizează monstrul haotic (*Hyle*, materia primordială). Într-una din ilustrații omul este înfățișat gol în mijlocul unui univers planetar de care îl leagă niște raze ce formează un poligon stelat. Contemporana sa, stareța alsaciană Herrade din Landsberg, într-o miniatură a lucrării sale *Hortus Deliciarum*, ne înfățișează, de asemenea, un om gol numit „microcosmus", legat cu niște raze de macrocosmosul circular care-l înconjoară. Scrierile Hildegardei au avut o mare influență asupra abatelui Trithemius, maestrul în științe oculte al lui Agrippa de Nettesheim.

Ghildele de arhitecți și de zidari și-au pierdut monopolul și influența o dată cu ivirea Reformei; aceasta a coincis cu Renașterea, adică cu scoaterea la lumină a teoriei platoniciene despre proporție și rolul Secțiunii de Aur ca legătură între cele cinci corpuri platoniciene prin minunatul tratat *Divina Proportione* al lui Luca Pacioli, ilustrat de prietenul său Leonardo da Vinci. Am semnalat deja academiile platoniciene care și-au făcut apariția în această reînnoire a neoplatonismului: Plethon pretindea că aduce Florenței tradiția societăților pitagorico-platoniciene, care ar fi supraviețuit în Imperiul Bizantin după închiderea oficială a școlilor păgâne de către Justinian. Întrucât aceste academii din Quattrocento, cu aspectul lor de societăți secrete cu ritualurile mistice, pretindeau să se revendice și de la misterele antice. Din 1468, Papa Paul al II-lea a început să le amenințe cu excomunicarea.

Dintre societățile secrete afiliate alchimiștilor am citat Roza-Cruce; numele acesteia a apărut întâia oară în *Fama Fraternitatis* de Jean-Valentin Andreae (1614), însă existența autentică și continuă a lui „Collegium Lucis" nu a fost niciodată dovedită; Michel Meier (1568–1622), medic al împăratului Rudolf al II-lea, și-a publicat totuși lucrarea *Themis Aurea, hoc est de legibus fraternitatis Rosae Crucis*, iar hermetiștii englezi Robert Fludd și Elias Ashmole, membri onorifici ai lojelor masonice operative, treceau drept rozacrucieni, așa cum fusese înaintea lor Francis Bacon. Michel Meier menționează, fără a arăta unde se află aceasta, un „colegiu al filosofilor" care ar exista din cele mai îndepărtate vremuri și ar fi legat de misterele egiptene, eleusine, orfice și pitagoreice. În ciuda lipsei unor date mai autentice, pare a fi dovedită printr-o scrisoare adresată din Lyon de către medicul Landolf, pe la 1510, lui Agrippa de Nettesheim existența a cel puțin unei societăți hermetice de acest

fel; acest document îi recomandă celebrului magician un „căutător zelos, aducătorul scrisorii, și îi sugerează să-l pună la încercare în vederea eventualei primiri într-o anumită societate (*si in nostra velit jurare capitula, nostro sodalicio adscitum face*). Descartes s-a interesat mult de Roza-Cruce din epoca sa (aceea a lui Fludd și Ashmole) pe care a frecventat-o la Ulm, în casa lui Faulhaber, și în Olanda, la cel mai bun prieten al său, Hegeland.

Societățile secrete sau semisecrete constituite de-a lungul veacurilor par să se inspire, toate, din tradițiile autentice sau apocrife care pretind că se trag din Marea Confrerie Pitagoreică, din Orfism, din Misterele de la Eleusis; filiația egipteană[3] este întotdeauna revendicată.

Anumite înrudiri sunt, în mod evident, ciudate. Să remarcăm menționarea Templierilor, o altă societate secretă devenită atât de puternică încât Filip cel Frumos și Clement al V-lea s-au unit spre a o distruge (supliciul lui Jacques de Molay, Marc Maestru al Templului, a avut loc la 18 martie 1314), atât în tradițiile francmasoneriei, cât și în ale Companionajului (rămășiță a lojelor independente de meșteșugari, nesupusă jurandelor și ghildelor oficiale). Numele Sfântului apostol Ioan apărea și în ritualul Templierilor, al căror patron era, sărbătoarea Sfântului Ioan (solstițiul de vară) era data cea mai însemnată pentru templieri, așa cum este și astăzi pentru francmasonii de rit scoțian[4]. În această zi de Sfântul Ioan a fost întemeiată, în 1717, Marea Lojă (speculativă) a Angliei, iar primele trei grade din inițierea masonică, moștenite de la Bauhütte, constituie francmasoneria, „Ioanită".

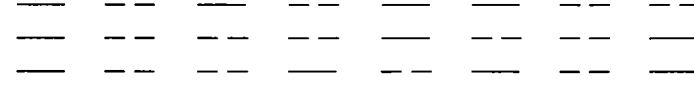
Printre coincidențele care ar putea fi adevărate transmiteri să semnalăm că în „micile mistere" de la Eleusis neofitul își punea la începutul inițierii piciorul stâng desculț pe pielea unui berbec; în inițierea masonică de gradul I figurează, se pare, un rit asemănător în care se folosește tot piciorul stâng. Pe un anumit număr de timpane de catedrale (cum este cel de la Sfântul Ștefan din Viena) veșmântul lui Hristos „în slavă" este ridicat pentru a arăta, dezgolit, genunchiul stâng și această dezvelire voită și pusă în evidență trebuie să aibă un sens; nu știu dacă biserica îl explică, dar ar putea fi unul dintre simbolurile al căror secret l-au luat cu ei maeștri zidari din Evul Mediu, aceia care și-au gravat „semnăturile" geometrice pe cheile de boltă ale atâtor biserici gotice. Una din legendele despre

Pythagoras, aceea care a făcut din el întruchiparea hiperboreanului Apollon, relatează că fiind recunoscut de Abaris, preot chiar într-unul din templele acestui zeu situat în țara cimerienilor, Pythagoras i-a arătat „coapsa lui de aur" pentru a confirma recunoașterea, cerându-i să păstreze secretul.

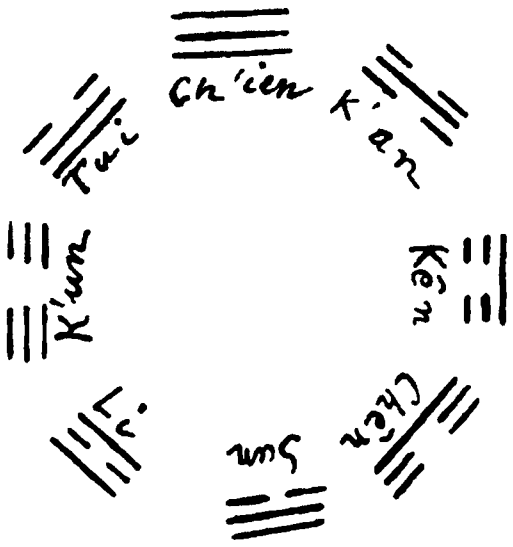
Zeița egipteană Maat, zeiță a măsurii și a echității și, împreună cu Isis și Thot, stăpână a inițierilor, avea drept amuletă același echer („unghiul echității" al lui Pythagoras) pe care îl vedem pe mormintele arhitecților romani la Roma și Pompei și sub busturile unor „maiștri" gotici, echer care mai face și astăzi parte din insignele și simbolurile masonice ale lojelor.

Știm că cea mai puternică societate secretă chinezească se numea „Triada" și era legată, în oarecare măsură, de mistica numerelor, mistică, după cum vom vedea, ce se deosebește prin punctul său de vedere și anumite amănunte de mistica pitagoreică, dar apropiindu-se de aceasta prin altele; a ajuns la ceea ce am putea numi mistica combinărilor.

Alături de numărul Trei (Triada), Pentada este și ea un principiu de armonie, îmbinare a primului număr feminin și a primului număr masculin complet; dar, după cum este dezvăluit în *Yi Jing* sau „Cartea schimbărilor", datată cu o mie de ani înaintea lui Iisus Hristos, carte de bază a acestei mistici a combinărilor, punctul său de plecare se află în cele două principii esențiale denumite Yang și Ying, principiul masculin esențial și principiul feminin esențial (— , și --), lumina și umbra, Cerul și Pământul. Așadar principiul masculin are ca simbol o bară — iar principiul feminin o bară întreruptă -- (imparul și parul având același simbolism ca în mistica pitagoreică). Dacă combinăm aceste două simboluri câte trei, în toate chipurile cu putință, obținem combinările următoare:



sau, așezându-le în cerc:



Acestea sunt în realitate *aranjamentele* cu repetiție de două obiecte diferite luate câte trei. Formula generală pentru aranjamente de n obiecte luate câte p, fiind $A_n^p = n^p$, avem aici $2^3 = 8$ ca în a a a, b b b, a a b, a b b , a b a, b a b, b a a, b b a. Logica combinatorie care a inspirat stabilirea acestor „Opt Trigrame Magice" (*Pa Kua*) deduce din aceste opt combinații primare ale lui Yang și Yin principiile esențiale ale Universului care rezultă, ca să spunem așa, din procentajul celor două principii dominante (masculin și feminin) din fiecare combinare.

Astfel simboul Ying sau Yin (numit și Kun) va avea următoarele calificative: umbra, receptivul, pământul ☷ ; Yang (numit și Ch'ien) va fi: Cerul, Principiul Creator, Lumina ☰ ; Tai ☱ simbolizează apusul, seninătatea, lacul, bruma, toamna, mlaștina;

Li ☲☲ sudul, focul, soarele, căldura, verbul; Sun ☴☴ cel ce pătrunde, vântul, fluxul realităților, forțele modelate în idei sau în forme; Chên ☳☳ răsăritul, cel ce tulbură, stimulează, tunetul, lemnul; Kén ☶☶ calmul, muntele, tăcerea, meditația; Kân ☵☵ nordul, apa, luna, erosul.

Continuând jocul metafizic început astfel, filosoful chinez combină apoi cele opt trigrame, două câte două după formula $A_n^p = n^p$, care dă 8^2, adică 64 de noi combinări

(de tipul ䷀ sau ䷁)

unde fiecare dintre acestea reprezintă, prin înseși procentajele și amalgamările elementelor materiale, spirituale, dinamice, chimice etc., una sau mai multe idei abstracte sau concrete. Această alchimie a conceptelor poate continua la nesfârșit; îl voi cruța pe cititor și de lista celor 64 de entități sau calități din a doua serie, însă voi remarca faptul că, până și în logica noastră occidentală, producerea în anumite probleme a tuturor combinărilor coerente posibile permite câteodată să se descopere unele soluții care, fără această metodă, ar rămâne neobservate și mai permite să se elimine soluțiile contradictorii.

Taoismul, a treia religie a chinezilor (celelalte două fiind Confucianismul și budismul), ale cărui origini merg înapoi până la Yi Jing și în care fraternizează ezoterismul înalt cu magia cea mai de jos, a alcătuit și el un „arbore a lui Tao", care seamănă cu arborele sefirotic. Are și el zece elemente, numai că două dintre ele, Tao însuși (*Calea* sau *Sensul*) și „Floarea de Aur" (această frumoasă metaforă acoperă țelul suprem al antrenamentului filosofic al taoismului) sunt dublate. Găsim aici Yang și Yin, apoi Viața sau Iubirea (și Soarta) Ming, esența sau Logosul personal, Hsing, *animus* și *anima* ale lui Jung (p'o și hun), în sfârșit, Kuei, sau

fantoma care se întoarce pe pământ și Sên sau spiritul reîncarnat care, după ce a ajuns la „Floarea de Aur", se scufundă în beatitudinea lui Tao.

Să mai adăugăm că triunghiul lui Pythagoras 3, 4, 5 era cunoscut autorului sau autorilor cărții *Yi Jing*. Este cu neputință de precizat dacă teorema pătratului ipotenuzei a fost descoperită în mod independent de către savanții chinezi încă din epoca primelor dinastii istorice (Shang-Yin și Chou din secolul al XVIII-lea până în secolul al III-lea î.Hr.) sau dacă au primit-o, pesemne, din Caldeea de unde China mai luase, între anii 3000 și 2000 probabil, tehnica bronzului, primele noțiuni de agricultură, calul, căruța și roata, poate că și tehnica ceramicii întărite în cuptor; singura invenție chineză propriu-zisă și originară din epoca preistorică ar fi fost aceea a creșterii viermelui de mătase.

Să părăsim acum îndepărtata Asie pentru a ne întoarce la concepția occidentală despre număr și pentru a examina evoluția ei în cursul erei noastre.

NOTE

[1] Toate acestea au fost împrumutate și de Franța prin Campanionaj, care a supraviețuit desființării corporațiilor de către revoluție.

[2] Să notăm că Agrippa îl numise pe Creator „Eternul Maestru al Creației".

[3] Herodot scrie în legătură cu obligația pitagoreicilor de a se îmbrăca cu haine din in: „Acest lucru este conform cu ceremoniile orfice... care sunt aceleași cu cele egiptene și pitagoreice".

[4] Ordinul Sfântul Ioan din Ierusalim, cândva rival cu acela al Templierilor, există încă în Anglia și în Germania având ca ramură catolică Ordinul Suveran de Malta.

CAPITOLUL IX

NUMĂRUL ȘI MATEMATICA MODERNĂ – NUMERE RAȚIONALE, ÎNTREGI ȘI FRACȚIONARE – NUMERAȚIA ÎN BAZE DIFERITE – CONCEPȚIA DESPRE INFINITUL ACTUAL – PRINCIPIUL INDUCȚIEI TOTALE – PARADOXUL LUI BOREL – FRACȚIILE PERIODICE

Matematica este muzica rațiunii.
(SYLVESTER)

Cel mai mare progres în aritmetică, sau în folosirea numerelor uzuale sau vulgare, dar care a avut urmări și asupra celei a numerelor științifice, a fost introducerea cifrelor arabe sau mai degrabă hinduse, și a lui zero, în secolul X al erei noastre. La indieni cifrele apar încă din secolul al II-lea; zero a fost adăugat în secolul al IX-lea; iar arabii l-au împrumutat imediat. Cel mai vechi manuscris european, cuprinzând cifrele zise arabe și pe zero, a fost redactat în Spania în anul 976; această notare, în mod special cu numerotație zecimală, simplifică radical toate operațiile aritmetice[1].

Problema sistemelor diferite de numerație, adică a folosirii de diferite *baze*, își are locul aici; vom vedea mai departe că la ora actuală ea își găsește în mod deosebit aplicarea în folosirea sistemului *binar* (în baza 2) pentru unele mașini de calculat. Suntem atât de obișnuiți cu sistemul zecimal, încât ideea că pot exista și alte sisteme, că numerele capătă alt aspect când este schimbată baza, ni se pare aproape absurdă; avem impresia că opt și trei nu se pot simboliza altfel decât prin 8 și 3, că numerele sunt o dată pentru totdeauna identificate cu cifrele prin care le reprezentăm. Este totuși evident că alegerea bazei 10, deși recomandabilă, a fost oricum arbitrară și că am fi putut la fel de bine să alegem 8, 5 sau 3, sau mai degrabă opt, cinci sau trei, întrucât simbolurile nu rămân aceleași. Teoria foarte simplă a sistemelor de numerație într-o bază oarecare se întemeiază pe faptul că fiind dat un număr întreg finit N, scris, de

pildă, în sistem zecimal, și un alt număr p pe care vrem să îl alegem ca bază, avem întotdeauna:

$$N = ap^n + bp^{n-1} + ... + kp + l,$$

a, b, ... k, l fiind numere întregi finite oarecare, dar mai mici decât p (unele vor putea fi egale cu zero). Valoarea lui n va fi corespunzătoare cu mărimea numărului N (p^n fiind cea mai mare putere a lui p al cărui multiplu este mai mic decât N); coeficienții a, b, c ... de multiplicare vor fi firește mai mici decât p, altfel primul termen ar deveni, de pildă, cel puțin p^{n+1}.

Atunci numărul N, în sistemul în bază p, se poate scrie a b c ... l, fiecare dintre aceste cifre putând fi zero, însă numărul lor fiind întotdeauna egal cu n + 1.

Exemple:

în sistemul nostru zecimal, 563 este reprezentarea simbolică a lui $5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3$, 500 reprezintă $5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 0$.

Tot acest număr 500 (numărul intrinsec, iar nu *cifrele* sale care se schimbă o dată cu baza de numerație) va căpăta diferite aspecte, după cum luăm ca bază numerele 5, 4, 3, 2. De exemplu:

în sistemul în bază 5 vom avea:

$500 = 4 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5 + 0$ care se va scrie 4000;

în sistemul în bază 4 vom avea:

$500 = 1 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 1 \times 4 + 0$ care se va scrie 13340;

în sistemul în bază 3 vom avea:

$500 = 2 \times 3^5 + 0 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2$ sau 200112;

în sistemul de bază 2 vom avea:

$500 = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0$ care se va scrie 111110100.

Dacă alegem o bază mai mare decât 10 principiul rămâne același, dar va trebui să dăm simboluri speciale lui 10 și numerelor cuprinse între 10 și bază, de exemplu pentru baza 12 vom putea lua pentru 10 simbolul δ, pentru 11 simbolul ϵ. Atunci, în exemplul precedent vom avea:

$500 = 3 \times 12^2 + 5 \times 12 + 8$ care se va scrie 358.

Vedem așadar că nu trebuie să confundăm numerele cu simbolurile lor. Sistemul nostru zecimal, cu cifrele sale arabe și cu 0, este atât de ușor de folosit încât am ajuns să facem această confuzie; exemplele de mai sus ne arată că este arbitrară și că, după cum afirmau pitagoreicii despre numerele lor divine și chiar științifice, fiecare număr are o valoare intrinsecă și proprietăți intrinseci, într-un cuvânt are o personalitate independentă de baza de numerație.

Pentru pitagoreici, care nu se ocupau de numere ca de niște instrumente de calcul practic sau comercial, problema bazei de numerație nu se punea, întrucât numerele figurate, deopotrivă numere și forme geometrice, erau reflectările arhetipurilor sau numere pure și își păstrau proprietățile intrinseci concret vizibile ca forme și ca legi de creștere. Proprietățile algebrice ale numerelor întregi ca șiruri de funcții crescătoare erau manifestate prin gnomoni sau diferențe prime, secunde etc., precursoare ale calculului modern al diferențelor folosit de anumite mașini de calcul. Acest calcul al diferențelor este el însuși un model, în numere întregi al calculului diferențial; la fel ca pentru diferențiala unei funcții, gradul unei diferențe este întotdeauna mai mic cu o unitate decât gradul funcției mamă. Pentru o funcție de gradul n sau pentru un număr solid (hipersolid) cu n dimensiuni, cea de-a n-a diferențială sau diferență este constantă, cea de ordinul n + 1 este nulă. Am dat exemple în capitolul VI, consacrat numerelor figurate; pentru numerele solide dodecaedrale a treia diferență este constanta 27, pentru numerele plane pentagonale a doua diferență este constanta 3. Toate acestea (teoria diferențelor gnomonice) mai țin încă de matematica grecească, iar de la Decartes încoace foarte puțini savanți s-au mai ocupat de numerele figurate, în afară de Sir d'Arcy Thompson, care a scris o frumoasă carte despre creșterea și morfologia organismelor vii (*Growth and Form*, Cambridge University Press). Trebuie totuși să amintesc articolul lui Mott-Smith, apărut în 1916 în *Monist* și intitulat „The Arithmetic Pyramid of Many Dimensions" și care este, după câte știu, primul care a descris relațiile între piramidele și hiperpiramidele lui Pascal, specificațiile piramidelor regulate cu n dimensiuni și dezvoltarea „multinomului" $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^m$.

Pentru a ajunge la matematicile de astăzi (căci despre ele este vorba în acest capitol), numerele propriu-zise sunt clasificate acum în mod firesc astfel:

Numere reale
- Numere naturale sau întregi } numere raționale
- Numere fracționare } numere raționale
- Numere iraționale algebrice
- Numere iraționale nealgebrice, dar netranscendente
- Numere transcendente
- Numere imaginare
- Numere complexe (imaginare și reale combinate)

La un alt nivel, avem clasificarea în numere finite și numere infinite sau mai curând „transfinite"; nu este vorba aici de infinitul simbolizat prin ∞, limita ideală și de neatins a unei mărimi sau a unui număr mai mare decât orice cantitate dată, ci de numere infinite concrete, actuale, *percepute* de inteligență ca atare și clasificate în ordinea mărimii. Problema posibilității unui „infinit actual", sau chiar a conceperii sale, a dat naștere, la vremea sa, unei întinse polemici. Exemplul unui infinit actual conceptibil și chiar concret este dat de posibilitatea ca Universul să fie infinit ca întindere și populat cu aștri sau cu nebuloase uniform repartizate. Acesta era Universul logic admis înainte ca ipoteza unui univers finit curbat în spațiul-timp să fi fost emisă de Einstein și acceptată ca posibilă și chiar ca probabilă; acest univers al lui Einstein ar avea un număr finit de nebuloase și de stele într-un volum finit și care ar putea fi calculat (telescopul de pe muntele Palomar va putea confirma această ipoteză și permite acest calcul). Dar înainte de Einstein mai toată lumea credea într-un univers infinit și cu un număr infinit de stele; se concepea, așadar, existența posibilă a unui infinit actual, concret.

Nu consider aici drept numere care trebuie să intre în cadrul acestei cărți elementele anumitor prelungiri matematice precum calculul determinanților, al matricelor, al corpurilor ideale etc.; deși, în ultimă instanță, în spatele acestor construcții impunătoare se ascund numere, „personalitățile" lor nu joacă aici nici un rol și este vorba mai degrabă de logică simbolică decât de matematică propriu-zisă. Nu ne vom ocupa nici de uriașa dezvoltare a teoriei funcțiilor; simpla enumerare a domeniilor și a definițiilor sale ar cere o lucrare separată, iar lucrarea de față nu este un tratat de analiză sau chiar de algebră, nici măcar de teoria numerelor, ci o expunere

rapidă a rolului Numărului ca factor însemnat in istoria misticii și a filosofiei occidentale.

Și totuși, o noțiune foarte generală, dar care ține de domeniul Numărului își găsește locul aici: este vorba de mulțime. „În matematică o mulțime ... este reunirea, socotită ca formând o nouă entitate, a mai multor entități numite «elementele mulțimii»". (*Encyclopédie Française*). Există mulțimi finite, precum mulțimea atomilor de oxigen într-un recipient dat. Există mulțimi infinite, precum șirul complet, socotit încheiat, al numerelor naturale 1, 2, 3, 4, ... n când n s-a mărit dincolo de orice număr dat... Intrăm deja în domeniul transfinitului; de altfel, teoria cantoriană a transfinitului este cea care a făcut cu putință stabilirea unei teorii coerente a mulțimilor.

Să ne oprim pentru moment la mulțimile finite sau, cel puțin, la noțiunea generală de mulțime, înainte să facem vreo distincție între cele două tipuri, finit sau infinit. Zicem că două mulțimi sunt *echivalente* sau au aceeași putere dacă fiecărui element al uneia putem face să-i corespundă un element, numai unul, din cealaltă (corespondentă biunivocă sau univocă și reciprocă). Definim atunci drept număr cardinal al unei mulțimi această putere, care este totodată caracteristica comună a tuturor mulțimilor care îi sunt echivalente. Putem trece de aici la numerele naturale plecând de la numerele 0, 1 și 2 și începând cu prezentarea lor logistică. Astfel, numărul *unu* derivă din principiul logic al identității: „Ceea ce este, este și nu poate, în același timp și sub același raport, să nu fie". Aceasta este într-adevăr prima intuiție, apoi idee logică, descoperită de inteligență îndată ce și-a format noțiunea de *existență a sa*, de ființă („este cineva care gândește sau care simte, așadar care este"; sau și mai smerit, „este ceva care simte plăcere sau suferință")[2]. Noțiunea de dualitate va fi sugerată de discriminarea dintre entitatea gânditoare (ființa de putere „unu") și restul universului, obiect al percepției. Noțiunea de negație, a neființei, este și ea sugerată de principiul identității: ceea ce poate în același timp să fie și să nu fie, nu este, sau mai degrabă „este ceea ce nu este". Aceste trei puncte de plecare sunt anterioare noțiunilor de „număr unu", de „număr doi", sau pereche, și de număr 0. Trecerea de la numărul unu (putem neglija aici, pentru moment, numărul doi ca individualitate specială) la un număr întreg natural oarecare se obține practic prin operație de descompunere a unei mulțimi; se ia din mulțime un element și se notează această scădere cu un simbol care va reprezenta o unitate, și pe care o vom

numi „puterea unu". Acest simbol va putea fi, de pildă, simbolul 1 (ar fi putut fi un punct, așa cum era pentru greci). Dacă vom înlătura mai departe unități, până la terminarea mulțimii, vom fi adăugat primului un anumit număr de simboluri 1, iar puterea sau „numărul cardinal" al mulțimii 1 astfel aliniate va fi, de asemenea, puterea sau numărul mulțimii inițiale de obiecte. Nu vom putea decât mai târziu să reprezentăm colecțiile de simboluri 1 prin cifre care să corespundă într-un mod mai abstract puterilor sau numerelor 2, 3, 4 ... etc.; ceea ce va permite să trecem de la operații mai grele pe mulțimi la operații mai abstracte pe cifre sau simboluri. Dar când am alcătuit prima mulțime de simboluri 1, am observat că treceam de la o mulțime (sau de la un număr) la următoarea, adăugând de fiecare dată simbolul unității, al numărului unu. Există așadar o operație iterativă, recurentă, care permite într-un mod general să trecem de la un număr la următorul; fiecare număr are un număr consecutiv, succesor.

Aici putem introduce, arbitrar, dar logic (și acest lucru va simplifica mult aritmetica și algebra), noțiunea de cifră a unei mulțimi care nu comportă *nici un* element; va fi cifra 0 corespunzând unui număr zero (i-am văzut arhetipul logic în noțiunea de negație opusă afirmației reprezentată de noțiunea de *ființă*). Aceasta ne permite să trecem la principiul fundamental numit al „inducției totale":

„Dacă o proporție este adevărată pentru numărul 1, și dacă se poate demonstra că: dacă este adevărată pentru numărul n, ea este adevărată și pentru numărul n + 1, ea va fi adevărată, oricare ar fi numărul n, adică pentru toate numerele întregi". Este ușor să trecem de aici la definițiile „prin recurență" ale adunării și ale înmulțirii și ale principiilor de asociativitate și de comutativitate. După ce am stabilit un nou înțeles pentru cuvântul „putere", care nu mai corespunde numărului cardinal, puterii unei mulțimi, ci faptului că un număr a fost înmulțit de n ori cu el însuși și se spune atunci că este „la puterea n", simbolizăm aceasta prin *exponentul* n, iar numărul la puterea n va fi reprezentat prin a^n. Simbolul $\sqrt{\ }$, al radicalului, denotă inversul unei puteri. Dacă $x = a^n$, a este rădăcina de ordinul n al lui x, numărul care înmulțit de n ori cu el însuși ($a \times a \times a \times a \times a$ ..., de n ori) îl reproducem pe x, și scriem $a = \sqrt[n]{x}$. Convenim să scriem

$a + 0 = a$ $\qquad$ $a \times 0 = 0$

$a \times (x + 1) = ax + a$, apoi $a^0 = 1$, $a^{x+1} = a^x \cdot a$, $a^1 = a$,

$a^2 = a \times a$ etc.

de unde

$$a^{x+y} = a^x \times a^y,\ a^{xy} = (a^x)^y.$$

Am menționat deja numerele sau mulțimile transfinite; matematica modernă nu se teme să le introducă la începutul teorici numerelor, înainte chiar de a trece la numerele fracționare sau incomensurabile; paradoxul aparent peste care dăm însă de la început este că numărul sau puterea mulțimii numerelor întregi, și numărul mulțimii numerelor pătrate, sau al numerelor impare, sunt egale între ele; după cum demonstrase deja Galilei, putem pune în corespondență univocă și reciprocă cele două șiruri:

1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	4	9	16	25	36	49	64	...

continuate nedefinit deși al doilea nu este, evident, decât o parte din primul. Concluzia lui Galilei a fost pur și simplu că această absurditate dovedea că numerele infinite nu există.

Cantor, nelăsându-se speriat de paradox, a dedus de aici, cu îndrăzneală, că în regatul transfinitului partea poate fi egală cu întregul și a luat chiar această proprietate drept definiție a claselor sau a mulțimilor transfinite. Numerele transfinite sunt cele care pot fi echivalente (avea același număr cardinal) cu părțile lor. Numerele pentru care partea nu este egală cu întregul sunt numere obișnuite, finite, care nu sunt, în această concepție, decât un caz particular al numerelor transfinite.

Voi menționa, anticipând teoria transfinitului (pe care o vom întâlni mai jos), că în timp ce pentru mulțimile finite numărul cardinal și numărul ordinal al mulțimii coincid și pot folosi aceeași cifră sau același simbol, dimpotrivă, pentru mulțimile transfinite o mulțime dată are un număr cardinal determinat, dar un număr oarecare de numere ordinale, ba chiar un număr infinit, după modul, modurile, în care membrii mulțimii pot fi „ordonați".

După această escapadă în stepele transfinitului, să ne întoarcem, pentru moment, la aritmetica numerelor întregi. Principiul înmulțirii numerelor întregi, derivat din cel al adunării, duce în mod natural la cel al împărțirii.

Dacă a x x = b, *b* este un multiplu al lui *a* iar *a* este un divizor al lui *b* (a și x de altfel). Dar dacă putem întotdeauna înmulți două numere întregi între ele, nu putem împărți mereu un număr întreg la un altul

(obținând un număr întreg ca rezultat). Numerele fracționare se introduc atunci în mod direct presupunând că există întotdeauna un număr x în așa fel încât $\frac{b}{a} = x$; când x nu este întreg, este fracționar.

Numerele întregi împreună cu numerele fracționare constituie clasa numerelor raționale; acestea sunt rădăcinile ecuațiilor de gradul întâi de tipul $ax \pm b = 0$. Trebuie să amintesc aici șirul numerelor întregi negative, simetric cu cel al numerelor întregi pozitive în raport de zero. Așadar $-a \times -b = +ab, -a \times +b = -ab$. Numerele fracționare negative apar imediat drept rezultate ale ecuației generale $ax + b = 0$.

Putem, de asemenea, luând exemplul lui Bertrand Russell, să obținem corpul numerelor fracționare într-un mod logistic plecând de la conceptul „claselor de cupluri"; putem astfel clasifica toate numerele raționale (întregi și fracționare) considerând fracțiile $\frac{a}{b}$

care le reprezentau (a și b fiind primi între ei, adică neavând divizor comun) și numind fracții de aceeași clasă pe cele pentru care (a + b) are aceeași valoare. De exemplu $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{4}{1}$ sunt de clasă cinci.

O clasă dată, a 131-a de pildă, nu va conține decât un număr finit de fracții și orice număr rațional (inclusiv cele întregi) se găsește într-o clasă, și numai într-o clasă. Dacă în fiecare clasă dispunem fracțiile care îi aparțin în ordinea mărimii, vom avea de exemplu $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$ și dacă scriem în continuare toate clasele unele după altele (despărțindu-le prin „punct și virgulă"), obținem:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{1}; \frac{1}{3}, \frac{3}{1}; \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}; \cdots$$ (desființând repetițiile).

Putem face această mulțime să corespundă biunivoc cu aceea a numerelor întregi; aceste două mulțimi au, așadar, aceeași putere, același număr cardinal (*partea*, mulțimea de numere întregi, are același „număr" ca și *întregul*, mulțime de numere raționale).

Înainte să trecem mai departe, să ne oprim puțin în domeniul numerelor întregi, pentru a nota câteva teoreme sau rezultate ciudate atât prin sens, cât și, uneori, prin ritmul formulelor care le exprimă.

Am văzut deja că tot așa cum:

$5^2 = 4^2 + 3^2$ sau $25 = 16 + 9$

avem $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$ sau $216 = 125 + 64 + 27$

(volumul cubului cu muchia egală cu 6 unități este egal cu suma volumelor a trei cuburi cu muchiile egale cu 5, 4, 3).

Și $20^3 = 14^3 + 13^3 + 12^3 + 11^3$

Coloana pătratelor	*Coloana cuburilor*
$1 = 1 = 1^2$	$1 = 1^2 = 1$
$1 + 3 = 4 = 2^2$	$3 + 5 = 2^3 = 8$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$	$7 + 9 + 11 = 3^3 = 27$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$	$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3 = 64$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$	$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5^3 = 125$
.....	.....

Al n-lea pătrat este egal cu suma primelor n numere impare.

Aici legea formării este mai subtilă.

Al n-lea cub este egal cu suma a n numere impare care se termină cu $n(n + 1) - 1$, inclusiv.

Coloana numerelor triunghiulare	*Pătratele numerelor triunghiulare*
$0 + 1 = 1$	$1^3 = 1^2$
$1 + 2 = 3$	$1^3 + 2^3 = 3^2$
$1 + 2 + 3 = 6$	$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$
$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$	$S^3 = S_{n=1}^{n=n} n^3 = T_n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Avem de asemenea:

$S^1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, Tn, al n-lea număr triunghiular

$S^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$$S^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = Tn^2$$

$$S^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(2n^2+3n+1)}{30}$$

Printre teoremele referitoare la numerele întregi, să citățm „ultima teoremă a lui Fermat" căreia Fermat pretindea că i-a găsit demonstrația (de atunci nu a mai fost regăsită, dar teorema nu a fost infirmată):

Expresia $x^n + y^n = z^n$ nu are soluție pentru un număr întreg n altul decât 2 (x, y și n fiind numele întregi).

Teorema lui Lagrange: orice număr întreg poate fi exprimat prin suma a patru pătrate (0 și 1 fiind socotite pătrate).

Orice număr întreg este egal cu suma a nouă cuburi întregi mai mari sau egale cu 0 (Wieferich).

Am vorbit într-un alt capitol despre triunghiurile diofantine, grupuri de 3 întregi reprezentând laturi ale triunghiurilor dreptunghice astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$.

Să nu uităm numerele întregi perfecte, egale cu suma divizorilor sau submultiplilor lor, ca de exemplu:

$$6 = 1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3$$
$$28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$$

apoi 496, 8128, 333550336, 8589869056.

Mai sunt cunoscute încă două.

Apoi numerele amicale, cum sunt 220 și 284, deoarece:

220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142, suma divizorilor lui 284 și

284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110, suma divizorilor lui 220.

Numerele prime (care nu au alt divizor decât 1) au, ca să zicem așa, personalități aparte, iar analiza lor și teoremele enunțate în legătură cu ele ar putea umple mai multe volume. Să citățm teorema lui Gauss, ca exemplu al unei corelări între anumite numere prime și geometria poligoanelor regulate:

Putem construi euclidian (cu rigla și compasul) un poligon regulat cu n laturi (împărțind o circumferință în n părți egale) atunci când (și numai atunci când):

1° $n = 2^p$

2° n este un număr prim de forma $2^k + 1$. În acest caz, adică atunci când $2^k + 1$ este un număr prim, avem întotdeauna $K = 2^q$, dar reciproca nu este adevărată, , $n = 2^{2q} + 1$ nu este întotdeauna un număr prim. De exemplu, n este prim pentru:

$q = 0$ ($n = 3$), $q = 1$ ($n = 5$), $q = 2$ ($n = 17$), $q = 3$ ($n = 257$), $q = 4$ ($n = 65537$), dar nu pentru $q = 5$ sau 6, 7, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73.

3° Sau când n este un produs de factori diferiți de aceste două tipuri 1° și 2°, adică de forma $2^p \times (2^k + 1)(2r + 1)..., 2^k + 1, 2^r + 1$, fiind numere prime distincte; nonagonul ($n = 9 = 3 \times 3$), poligonul cu 18 laturi ($2 \times 3 \times 3$), nu pot fi construite euclidian deoarece 3, deși satisface condiția 2°, ($3 = 2^1 + 1$), este repetat de două ori[3].

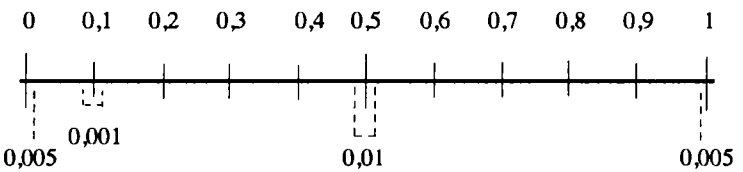
Din teorema lui Gauss rezultă că poligoanele regulate cu 3, 4, 5, 6, 8, 12, 15, 16, 17, 20, 24... laturi se pot construi euclidian (ca și cele cu 257 și 65537 laturi), dar nu cele cu 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 75 ... laturi. Poligonul regulat cu 257 de laturi a fost studiat și construit (în 1832) de Richelet, poligonul regulat cu 65537 laturi a fost studiat de profesorul Hermes (cu nume predestinat) din Göttingen, care i-a închinat zece ani din viață și a izbutit (în 1894) să-i facă construcția; i-a fost, nădăjduiesc, gravată pe mormânt. Dragostea față de un număr sau de un poligon nu poate merge mai departe de atât!

În plus față de teoria numerelor prime și adesea fecundată de ea, teoria generală a numerelor întregi s-a dizolvat după mai multe linii de cercetare originale, polinoame cu coeficienți și exponenți întregi, modelele lui Kummer, modelele lui Dedekind etc. Nu mă voi opri asupra acestora, întrucât este vorba mai degrabă de simboluri decât de numere propriu-zise. Euclid dovedise deja că există un număr infinit de numere prime. Cebîșev a dovedit că dacă n este un număr întreg suficient de mare, există întotdeauna un număr prim între n și 2n. Cel mai mare număr prim cunoscut este $2^{127} - 1$, care are 39 de cifre.

Să ne întoarcem la numerele raționale, cele care cuprind numerele întregi și numerele fracționare raționale. Cu toate că mulțimea numerelor raționale (puncte M astfel încât lungimea OM să fie măsurată printr-un număr rațional) în intervalul O A, segment dintr-o dreaptă oarecare, este *dens* și *compact* (între două fracții diferite $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ putem oricând intercala o fracție $\frac{m+p}{n+q}$), această mulțime este departe de a umple intervalul; interstițiile sunt în număr infinit și depășesc cu mult punctele care corespund

numerelor raţionale (de fapt, după cum vom vedea mai departe, ele constituie un infinit „nenumărabil" cu o putere mai mare, în transfinit, decât cea a mulţimii punctelor raţionale care este egală cu aceea a mulţimii „numărabile" a numerelor întregi).

Emil Borel şi-a închipuit o demonstraţie ingenioasă a acestui paradox, unul dintre cele mai impresionante din numeroasele paradoxuri ale transfinitului. Să luăm un segment de dreaptă de 1 metru lungime, divizibil la infinit. Să însemnăm pe el punctele de diviziune din zece în zece decimetri



puncte ale căror abscise sunt 0,1, 0,2, ... 0,9, 1, şi să scoatem din jurul fiecăruia, de o parte şi de alta, o bucăţică din segmentul de 1 metru, fiecare cu dimensiunea de 0,01, astfel încât totalul să facă 0,1, adică un decimetru. Apoi, din jurul fiecărui punct de diviziune în centimetri, puncte ale căror abscise sunt 0,01 ... 0,09, 0,11, 0,12 ... 0,98, 0,99 (neglijând punctele deja folosite), mai scoatem o bucăţică de 0,001 m astfel încât de data aceasta am scos în total un centimetru (0,01). Reîncepem cu milimetri, zecimi de milimetri şi aşa mai departe la nesfârşit. Ce va rămâne? Bunul simţ răspunde: nimic! întrucât pe fiecare bucăţică din segment, oricât de mică ar fi, se va afla o infinitate (numărabilă) de puncte zecimale din fiecare din care s-a luat o bucată finită. Şi totuşi, totalul de

0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 ... etc. este de 0,111111 ...

adică doar a noua parte dintr-un metru:

0,1
0,01
0,001
0,0001
.....
.....

0,111111111111111

Cu alte cuvinte, au fost scoase *toate* punctele zecimale (adică *toate* punctele raționale, care formează o mulțime densă decupând în jurul fiecăruia dintre ele o grosime finită, și totuși rămâne cel puțin 0,88888888 ... din lungimea inițială a segmentului.

De asemenea am putea reduce porțiunea scoasă la 0,01 sau 0,001 din segmentul inițial sau să o facem cât vrem de mică; ce a fost decupat ar fi la limită nul în raport cu ceea ce rămâne, ... și totuși nu rămâne nimic ... continuu: *măsura* mulțimii numerelor raționale de pe acest segment de dreaptă este 0.

Într-o altă demonstrație a acestui paradox, care arată și faptul că probabilitatea ca un număr ales sau marcat la întâmplare pe dreaptă să fie rațional este nulă, putem lua mai întâi toate numerele raționale mai mici decât 1 clasându-le după numitor:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \ldots$$

și adăugăm acestor puncte intervale pentru care aceste puncte sunt mijloace și având, pe rând, ca lungime 0,1 – 0,01 – 0,001 – 0,0001 etc. suma lor fiind iarăși egală cu 0,111111111 ... $\frac{1}{9}$.

Vom vedea explicația paradoxului când vom pătrunde în domeniul transfinitului și vom aborda noțiunea de continuu.

Să nu uităm până atunci câteva convenții suplimentare despre exponenți (indici de putere sau de grad, ca n în a^n), care simplifică în mare măsură mânuirea expresiilor algebrice sau transcendente evitând incoerențele și contradicțiile.

Spunem de exemplu că:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-3} = \frac{1}{a^3} \qquad a_n^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Fracții zecimale

Practica ne spune că, în general, în sistemul nostru de numerație zecimală, o fracție se poate reprezenta în două feluri:

$\frac{3}{5}$ echivalează cu 0,6 (câtul lui 3 împărțit la 5)

$\frac{5}{6}$ cu 0,8333 ...

$\frac{7}{8}$ cu 0,875.

Fracțiile zecimale pot fi limitate (ca 0,6 sau 0,875), sau nelimitate; în acest caz ele sunt (fracțiile raționale) întotdeauna periodice, cum este 0,83333 ... (de altfel aici perioada, cifra 3, este precedată de un element detașat, 8). Orice fracție rațională poate, așadar, să fie reprezentată de o fracție zecimală cuprinzând (după virgulă, dacă fracția este mai mică decât 1) o parte zecimală simplă sau o parte zecimală periodică nelimitată simplă sau mixtă (având înaintea perioadei una sau mai multe cifre care nu fac parte din ea).

În general, fracțiile zecimale periodice sunt progresii geometrice deghizate:

$$0{,}363636\ldots \text{ [simbol: } 0{,}(36)] = \frac{36}{100} + \frac{36}{10.000} + \frac{36}{1.000.000} \ldots$$

O fracție limitată poate fi considerată fracție periodică cu perioada zero.

Atunci: orice număr rațional poate fi reprezentat într-un singur fel printr-o fracție zecimală periodică și, reciproc, orice fracție zecimală periodică reprezintă un număr rațional.

Pentru fracțiile zecimale periodice simple, metoda de transformare a fracției zecimale este următoarea:

$$0, a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n\ a_1\ a_2 \ldots a_n \ldots = \frac{a_1\ a_2 \ldots a_n}{9 \cdots\cdots 9 \text{ (de n ori)}}$$

Pentru fracțiile mixte procesul este ceva mai complicat; avem, de exemplu, de transformat 3,2363636 = 3,2 (36) în fracție ordinară. Considerăm 3236 un număr întreg din care scădem 32 (parte nerecurentă) rămânându-ne 3204, și îl luăm pe 3204 ca numărător al unei fracții al cărei numitor este alcătuit din tot atâtea 9 câte cifre sunt în perioadă (aici 2) și din tot atâți 0 în continuare câte cifre sunt între perioadă și virgulă (aici 1), deci $\frac{3204}{990}$.

Ne putem întreba dacă există fracții zecimale care nu corespund unor fracții raționale. Răspunsul este afirmativ; ele există într-adevăr,

sunt nelimitate însă neperiodice şi corespund numerelor iraţionale şi incomensurabile despre care vom vorbi în capitolul următor.

NOTE

[1] Cercetări recente în oraşele moarte din Guatemala par să dovedească faptul că mayaşii din Vechiul Imperiu ar fi cunoscut atât folosirea lui 0, cât şi poziţia cifrelor în numeraţie.

[2] Am putea, de asemenea, pleca într-un mod şi mai logistic făcând din principiul identităţii definiţia cuvântului „fiinţă".

[3] Teorema lui Gauss rezultă din faptul că ecuaţia $x^n - 1 = 0$ îşi are rădăcinile reprezentabile printr-o notaţie euclidiană (combinări de rădăcini pătrate) numai dacă este îndeplinită una dintre cele trei condiţii enunţate mai sus.

CAPITOLUL X

NUMERE IRAȚIONALE – NUMERE ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE – NUMERE REALE ȘI IMAGINARE – CÂTEVA NUMERE REMARCABILE – NUMERE ȘI DIMENSIUNI – NUMERELE TRANSFINITE ALE LUI CANTOR

„Matematica este clasa tuturor propozițiilor de forma „p implică q", în care p și q sunt propoziții."

Primele numere iraționale care ne vin în minte sunt cele care îi nedumereau deja pe matematicienii greci și care apar, cel puțin simbolic, atunci când vrem să obținem rădăcina pătrată a unui număr întreg care nu este un pătrat perfect. De exemplu, rădăcina pătrată din 2, sau $\sqrt{2}$, numărul care înmulțit cu el însuși dă 2, și de care s-au poticnit grecii încercând să calculeze diagonala pătratului. Exprimați în fracții zecimale, radicalii de gradul 2 (ca și cei de orice grad) produc fracții zecimale nelimitate neperiodice. Ei intră în categoria mai generală a numerelor algebrice, adică a numerelor care pot fi rădăcinile unei ecuații algebrice $ax^n + bx^{n-1} + ... + px + q = 0$ al cărui prim membru este un polinom întreg în x cu coeficienți raționali și exponenți întregi. Dar, deși orice număr algebric ca rădăcină a unei ecuații de gradul doi poate fi scris sub forma unei combinații de radicali de gradul doi (de fapt $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ pentru rădăcinile ecuației normale $ax^2 + bx + c = 0$), deși rădăcinile ecuației generale de gradul trei se pot reprezenta prin radicali de gradul doi și trei și deși cele ale ecuației generale de gradul patru se pot reprezenta prin radicali de gradul patru sau de gradul doi, analogia se oprește aici: ecuația generală de gradul cinci nu poate fi rezolvată în radicali, chiar dacă sunt de gradul cinci sau de orice alt grad. Acest lucru a fost dovedit de Abel; Galois a demonstrat că situația este

aceeași pentru orice ecuație de un grad mai mare de cinci. Există, așadar, șiruri de numere algebrice iraționale radicale euclidiene (exprimate în radicali de gradul II), cum este $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, numere algebrice iraționale neeuclidiene (radicali de un ordin mai mare decât 2, cum sunt $\sqrt[3]{5}, \sqrt[2]{4\sqrt[3]{5}}$) și în sfârșit numere algebrice iraționale pe care le-am putea numi *iradicali*, care nu se pot exprima sub forma unor combinații de radicali în număr finit, cum sunt rădăcinile ecuațiilor de un grad mai mare decât gradul patru. Deși netranscendente (le vom întâlni și pe acestea neîntârziat)și algebrice prin definiție, aceste numere nu pot, în general, să fie figurate prin nici o combinație de simboluri algebrice exprimând un număr finit de operații.

Totuși, datorită geniului lui Galois, ecuațiile ale căror rădăcini sunt aceste numere pot fi rezolvate prin teoria grupurilor de substituții. Repet, ele formează o parte din mulțimea numerelor algebrice. Această mulțime are, printre altele, proprietatea de a avea aceeași putere, același număr cardinal ca și mulțimea numerelor întregi naturale și, de asemenea, proprietatea generală a mulțimilor transfinite de a putea fi egală (ca număr, așadar, ca putere) cu una din părțile sale. Cantor și-a închipuit o demonstrație originală a acestei proprietăți a mulțimii numerelor algebrice de a fi echivalentă cu mulțimea numerelor naturale (de a fi un infinit numărabil, asemeni numerelor raționale fracționare și întregi, sau mulțimii numerelor-puncte raționale între 0 și 1 pe o dreaptă). Anticipez aici, așadar, capitolul transfinitului; iată demonstrația lui Cantor:

El clasează în fiecare caz ecuațiile algebrice după valoarea sumei Σ a valorilor *absolute* (pozitive sau făcute pozitive) ale coeficienților termenilor ecuației; de exemplu, pentru ecuația suma $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 13x + 4 = 0$ va fi așezată în a 23-a căsuță (1 + 3 + 2 + 13 + 4 = 23) din rândul al cincilea (gradul cinci). În fiecare căsuță putem clasa ecuațiile într-o ordine asemănătoare, de pildă, cu așezarea cuvintelor într-un dicționar, după mărimea crescătoare a coeficienților. Putem concepe acum ca fiind scrise dedesubtul fiecărei ecuații rădăcinile sale reale (sunt și rădăcini „imaginare" care arată numerele imaginare despre care nu am vorbit până acum), care sunt în număr finit (egal, în plus, cu gradul ecuației), și obținem astfel un

șir numărabil de numere, deoarece le putem pune în corespondență univocă și reciprocă cu șirul numerelor naturale. Asemenea numerelor raționale, chiar și numerele algebrice neraționale se pot scrie sub forma unor fracții zecimale, însă partea zecimală nu va fi periodică, adică dacă este nelimitată cifrele ei vor fi într-o ordine oarecare fără nici o lege de repetiție (proprietate care aparține și numerelor transcendente pe care nu le-am prezentat încă). În ceea ce privește numerele algebrice raționale, care sunt rădăcinile unor ecuații de gradul întâi, de tipul $ax + b = 0$, ele furnizează în mod firesc fracții zecimale periodice sau limitate.

Una dintre proprietățile numerelor algebrice euclidiene (de gradul II) este aceea de a putea fi scrisă sub forma unei fracții *continue*; un exemplu ne va arăta îndată semnificația acestui ultim termen.

Am văzut că după o teoremă a lui Nathan Altshiller–Court (de la Universitatea din Oklahoma) rădăcina negativă a ecuației de gradul doi $x^2 - x - a = 0$,

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

este egală în valoare absolută cu:

$$\text{limită} \quad \cfrac{a}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{a}{\ddots}}}}$$

Aceasta este o fracție continuă periodică continuată nedefinit, în care a poate avea orice valoare întreagă. Rădăcina pozitivă este

$$x_1 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a \ldots}}}}$$

Această teoremă a lui Altshiller-Court duce la următorul rezultat neașteptat:

Pentru $a = 2$ $\qquad x^2 - x - 2 = 0$

$$x_1 = \frac{1 + 3}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{1 - 3}{2} = -1$$

și avem:

$$2 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots}}}}$$

și:

$$1 = \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \ldots}}}}$$

Calculând valoarea funcției continue după fiecare 2, obținem „redusele" $\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{6}{5}, \frac{10}{11}, \frac{22}{23}, \frac{42}{43}$ ... care oscilează în jurul valorii 1 de care se apropie asimptotic.

Pentru Secțiunea de Aur, teorema lui Altshiller-Court ne-a dat, plecând de la $x^2 = x + 1$

$$x_1 = \varnothing = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

și

$$x_2 = \frac{-1}{\varnothing} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\varnothing = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}}$$

și

$$\frac{1}{\varnothing} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

Aici redusele fracției continue sunt fracțiile:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55};$$

în care regăsim două șiruri ale lui Fibonacci paralele. Încă o dată, aceste relații extraordinar de strânse dintre proporția Secțiunii de Aur sau numărul Φ și unitate, monada, explică în oarecare măsură, lăsând orice mistică la o parte, de ce acest număr are proprietăți atât algebrice, cât și geometrice unice. Printre numerele geometrice, este cu siguranță numărul, invariantul cel mai remarcabil.

Chiar dacă adăugăm numerelor întregi și raționale toate numerele algebrice, euclidiene, neeuclidiene radicale și neradicale, suntem departe de a fi epuizat șirul numerelor care reprezintă, de pildă, toate punctele posibile de pe o linie dreaptă OA, ale continuului liniar. Să reluăm exemplul dat de Borel: scoțând de pe un segment de dreaptă

OA egal cu un metru toate numerele raționale, apoi toate numerele algebrice (ceea ce reprezintă, de asemenea, o infinitate numărabilă), încă mai rămâne pe segmentul OA un număr de puncte care reprezintă nu numai o infinitate, ci și o infinitate „nenumărabilă", adică al cărei raport între numerele scoase și cele care rămân să fie zero. Raportul între puterea unui transfinit numărabil și cea a unui transfinit nenumărabil este într-adevăr 0, asemenea celui dintre puterea unei mulțimi finite și cea a unei mulțimi transfinite numărabile.

Mulțimea tuturor punctelor de pe un segment de dreaptă finit sau prelungit la infinit se numește mulțimea continuului; faptul că această mulțime de puncte pe dreapta trasată, vizibilă, corespunde în acest fel riguros mulțimii tuturor numerelor imaginabile între 0 și 1, de exemplu, este un câștig remarcabil al intuiției noastre; este vorba de continuul cel mai logic, cel mai apropiat de înțelegerea noastră, cel care este definit de principiul lui Arhimede, despre care vom vorbi mai departe. Avem, așadar, mulțimea continuului egală cu mulțimea tuturor numerelor *reale*; această denumire cuprinde toate numerele normale posibile, imaginabile, în afara numerelor *imaginare*, anormale dacă vreți, întrucât existența lor chiar abstractă este întemeiată pe un punct de plecare contradictoriu. Cu toate acestea, închipuirea omenească este atât de puternică încât numerele imaginare, pe care le vom defini ceva mai departe, par că într-adevăr există în vreun fel oarecare, într-o lume în afara lumii noastre dar atingând-o uneori, precum lumile neeuclidiene, nearistotelice, chiar lumea nearhimedică cu care tocmai l-am amenințat pe cititor. Mulțimea numerelor reale, ale cărei abscise formează continuul liniar, cuprinde așadar în afara numerelor raționale (care la rândul lor cuprind numerele naturale sau întregi și numerele fracționare), toate numerele algebrice și unele numere care nu sunt nici raționale, nici algebrice, care nu sunt deci rădăcini ale vreunei ecuații algebrice cu coeficienți raționali și cu exponenți întregi. Aceste numere sunt numite transcendente. Ca exemple de numere transcendente remarcabile le voi numi pe π (raportul invariabil între circumferința și diametrul unui arc oarecare) și pe $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Orice număr real poate fi reprezentat printr-un șir nesfârșit de numere întregi scrise ca fracție zecimală; în cazul numerelor transcendente (ca și în cel al numerelor algebrice iraționale), fracția nu va fi periodică. La fel, orice șir, infinit sau nu, de numere raționale (sau de numere întregi) poate reprezenta un număr

real. Să citățm aici „tăieturile" lui Dedekind, numere iraționale imaginate ca două șiruri nesfârșite care se întâlnesc. $\sqrt{2}$ va fi , spre exemplu, punctul de întâlnire, „tăietura" a două șiruri, cel al tuturor numerelor pozitive raționale al căror pătrat este mai mare decât 2 și cel al tuturor celorlalte numere raționale. Mai general: orice lege oarecare de succesiune a numitorilor unei fracții continue sau a zecimalelor unui număr zecimal va reprezenta întotdeauna un număr real, iar reciproca este, de asemenea, adevărată. Fracțiile ordinare sunt considerate niște cazuri particulare ale fracțiilor continue. Sau altfel: numerele reale dintre 0 și 1 se pot obține scriind, începând de la 0, șiruri nelimitate de cifre care se succed într-un fel oarecare. Să menționăm aici, anticipând încă o dată prezentarea oficială a numerelor transfinite (aceste contacte preliminare ne vor familiariza cu caracterul lor ciudat), o proprietate paradoxală care subliniază legătura logică dintre mulțimile numerelor finite, mulțimile transfinite și spațiile geometrice: numărul total al punctelor reale de pe un segment de dreaptă este egal ca putere (sau număr cardinal) cu numărul punctelor de pe dreapta obținută prelungind la nesfârșit segmentul dat într-o parte și în cealaltă. Acest număr corespunde nu numai mulțimii tuturor numerelor reale, ci și continuului geometric sau „Marele continuu". După cum am văzut deja, punctele reale corespund biunivoc numerelor reale. Dar (și avem aici un nou paradox al infinitului) acest număr al tuturor punctelor de pe o dreaptă, al continuului cu o dimensiune, este egal cu numărul tuturor punctelor dintr-un plan oarecare (continuu cu două dimensiuni) și cu numărul tuturor punctelor din spațiu (continuu cu trei dimensiuni) și acest lucru rămâne adevărat pentru un continuu cu un număr oarecare de dimensiuni. De exemplu, dacă 0, a, b, c, ... j reprezintă primele nouă numere și zero, grila

0, a c d i j ....
0, j a d i b ....
0, d b c f g ...
.....
.....
.....

dezvoltată la nesfârșit prin scrierea cifrele la întâmplare (fără lege periodică) va putea da, în teorie, toate numerele reale. „Grila continuului" se poate rândui într-o „mulțime *bine ordonată*" având „puterea continuului", al doilea număr din șirul numerelor cardinale

transfinite (a se vedea mai jos). Acest continuu geometric care cuprinde toate punctele de pe o dreaptă, dintr-un plan sau dintr-un spațiu cu trei dimensiuni se mai numește și „continuu arhimedic", întrucât ascultă de principiul lui Arhimede sau axioma continuului.

Iat-o pentru un continuu liniar: dacă A și B sunt două puncte pe o dreaptă oarecare, iar A_1 un punct intermediar, putem întotdeauna să repetăm segmentul AA_1 de un număr destul de mare de ori, n, astfel încât AA_n să fie dincolo de B (AB fiind segmentul finit oarecare, $AA_n = n \times AA_1$). Sau, dacă a și b sunt două numere reale oarecare, cu $b > a$, putem găsi întotdeauna un număr întreg n, astfel încât $n\,p > b - a$, p fiind un alt număr întreg oarecare.

Geometria uzuală este arhimedică, însă putem concepe numere și spații nearhimedice. Cât despre geometriile neeuclidiene și multidimensionale, ne-am obișnuit deja cu ideea că spațiul nostru este un spațiu-timp riemanian (neecludian) cu patru dimensiuni.

Să mai introducem câteva noțiuni care țin mai degrabă de teoria transfinitului, însă cititorul a putut constata că transfinitul pătrunde peste tot în teoria modernă a numerelor. Tot așa cum putem ordona după mărime numerele naturale, raționale și algebrice, tot așa printr-un act al minții putem să dispunem o mulțime infinită de numere reale după mărime (datorită „grilei continuului"); mulțimea numerelor reale este nu doar *ordonată*, ci și bine ordonată. Zicem că o mulțime E este *bine ordonată* dacă, fiind dată una din submulțimile sale ordonate E', în E' se află un element a situat înaintea tuturor celorlalte elemente ale lui E'. Nu este cazul pentru mulțimea ordonată a numerelor raționale rânduite în ordinea mărimii, dar această mulțime poate fi la fel de bine ordonată alegând o altă lege de succesiune[1].

L-am menționat deja pe π (raportul dintre circumferință și diametru):

$\pi = 3{,}141592265\ ...$[2]

și pe $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828\ ...$

ca fiind numerele transcendente cele mai remarcabile și desigur cele mai cunoscute. Iată câteva formule care arată în ce fel se pot exprima aceste două numere ca serii convergente sau în fracții continue:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \ldots + \frac{1}{n!} \ldots$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 \ldots}}}}}}}}$$

$$\pi = \frac{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2 \ldots}{3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 9^2 \ldots}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 \ldots}}}}$$

Hermitte și Lindeman au fost primii care au dovedit că π și e sunt transcendente. Lindeman a găsit o metodă pentru a genera numere transcendente în serii nelimitate.

S-a demonstrat că dacă α și β sunt două numere algebrice, atunci $\alpha\beta$ este transcendent, în afară de cazul când α este egal cu 0 sau cu 1, sau când β este rațional. În particular $2^{\sqrt{2}}$ este transcendent.

Din faptul că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă, în timp ce aceea a numerelor algebrice este, rezultă că mulțimea numerelor transcendente nu este numărabilă.

Înainte să mă despart de numerele finite îmi mai rămâne să menționez numerele așa-numite imaginare. Ele alcătuiesc unul din domeniile cele mai bizare, ca definiție însăși, ale științei matematice. Căci după ce am stabilit ca axiome de nezdruncinat faptul că produsul dintre un număr negativ și unul pozitiv este negativ

(ax – b = – ab), dar că produsul a două numere negative este pozitiv (–ax – b = + ab), algebra introduce cu seninătate numărul al cărui produs cu el însuși este – 1 și-i conferă simbolul $\sqrt{-1}$. Și toate acestea admițând că numărul i = $\sqrt{-1}$ este imposibil și dându-i calificativul de imaginar.

Acest fapt nu i-a împiedicat pe matematicieni să pună, plini de zel, bazele unei algebre a acestor numere imaginare simple (a $\sqrt{-1}$) sau complexe (a + b$\sqrt{-1}$), a acestor numere care nu există nici logic, nici virtual, apoi ale unei geometrii aferente. Pe urmă s-a întâmplat ceva curios care pare să demonstreze că cele mai ciudate concepții ieșite din creierul omenesc par să corespundă întotdeauna unei realități, unui domeniu tăinuit al lumii exterioare. S-a observat că algebra și geometria (diagramele lui Argand) imaginarelor se aplică într-un fel ciudat, în mod direct, elementelor teoriei și practicii curenților alternativi, iar datorită diagramelor imaginare se pot calcula, calibra, controla cu ușurință mașinării la fel de concrete cum ar fi statoarele alternatoarelor sau transformatoarelor. Ca terminologie se preferă acum calificativul „complex" (în realitate un număr mixt, a ± b$\sqrt{-1}$, pe jumătate real și imaginar). În teoria ecuațiilor algebrice, rădăcinile imaginare sau complexe (se găsesc din belșug chiar în ecuațiile de gradul al II-lea) cer să fie luate la fel de serios în considerare ca și rădăcinile reale.

Rădăcina pătrată din minus unu, $\sqrt{-1}$, primul număr imaginar, este exprimată deseori prin simbolul i. Iată, de exemplu, diferitele valori ale puterii lui i = $\sqrt{-1}$ așa cum apar în ecuații de un grad mai mare decât cel al lui $x^2 + 1 = 0$;

$i = \sqrt{-1} = i$	$i^2 = -1$	$i^8 = -i$	$i^4 = 1$
$i^5 = i$	$i^6 = -1$	$i^7 = -i$	$i^8 = -1$
$i^9 = i$	$i^{10} = -1$	$i^{11} = -i$	$i^{12} = 1$

Convențiile relative la exponenții aritmeticii numerelor întregi

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a \times a = a^2 \qquad \overbrace{a \times a \times a \ldots \times a}^{\text{n ori}} = a^n$$

$$a^m \times a^m = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

sunt generalizate și se aplică numerelor reale:

$$x_n^{\frac{m}{}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad x^{-m} = \frac{1}{x^m} \qquad x_m^{\frac{1}{}} = \sqrt[m]{x}$$

$$x_n^{\frac{m}{}} \times x_q^{\frac{p}{}} = x_n^{\frac{m}{}} + \frac{p}{q}$$

$$= x^{\frac{mq + pn}{nq}}$$

Numărul imaginar i și cele două numere transcendente π și e sunt legate de unitate prin ecuația simplă:

$1 + e^{i\pi} = o$

Iată câteva „numere mari" finite:

$9^9 = 387\,420\,489$

$(9^9)^9 = 9^{81}, < 9^{99}$

Dar cel mai mare număr cu trei cifre care se poate scrie este:

$9^{(9^9)} = 9^{387\,420\,489}$

care are 309693100 de cifre.

$9! = 9 \times 8 \times 7x\ 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

este doar 362 880; acesta este numărul care arată în câte feluri diferite pot fi așezate nouă persoane la o masă.

$10!$ este 3628800 și 10^{10} este 10000000000

Numărul de particule din Univers (calculat de Eddington), 2×10^{79} (electroni + protoni), nu are decât 80 de cifre.

Cel mai mare număr prim cunoscut $2^{127} - 1$ nu are decât 39 de cifre.

Exemple de creștere vertiginoasă dată de funcția exponențială $y = e^x$

Pentru	$x = 0$	$y = 1$ cm.
	$x = 1$	$y = 2{,}7$
	$x = 2$	$y = 1{,}5$ m.
	$x = 5$	$y = 220$ m.
	$x = 10$	$y = 4800$ km.
	$x = 20$	$y = 9{,}5 \times 10^{12}$ km.

Expresiile transcendente exponențiale cum sunt $m^x \frac{1}{2} = m^{\sqrt{x}}$ se calculează ușor prin logaritmi. Nu voi aminti decât definiția logaritmilor.

Dacă $y = a^x$

x este logaritmul în bază a al lui y.

Recent, un matematician a propus ca unitate pentru numerele foarte mari *Gogolul.*

Un Gogol este egal cu 10^{100} (unitatea urmată de 100 de zerouri) și

Un Gogol complex este egal cu $10^{10^{100}}$ care va face față vreme îndelungată tuturor nevoilor noastre.

Unitățile de măsură pentru dimensiunile mici, după centimetru, care este unitatea etalon C.G.S. (sistemul centimetru, gram, secundă) sunt:

micronul $\mu = \frac{1^{m.m}}{1000}$ m

milimicronul $\mu\mu = \frac{1\mu}{1000} = 10^{-9}$m

angströmul $Å = 1^{-10}$m $= 10^{-8}$cm $= \frac{1\mu\mu}{10} = \frac{1\mu}{10.000}$

unitatea $X = \frac{1Å}{1.000}$

Pentru distanțe mari:

Un an lumină = 10.000 miliarde de km

sau $3156 \times 10^7 \times 3000$ km

sau 6×10^{12} mile.

Parsecul este de vreo trei ori mai mare:

$= 308 \times 10^{13}$ km

Megaparsecul = 3,26 milioane de ani lumină.

Diametrul Căii Lactee este de aproximativ 100.000 de ani lumină.

Galaxia cea mai apropiată s-ar afla la 1.000.000 de ani lumină. Telescopul cu oglindă de pe muntele Palomar permite acum să se observe galaxii care se află la o distanță de 360.000.000 de ani lumină.

Se știe că de când Einstein a introdus ipoteza unui Univers finit, savanții au încercat să măsoare dimensiunile Universului presupus eliptic sau sferic.

Hubble socotise că raza Universului ar fi de 88.000 de milioane de ani lumină ($8{,}5 \times 10^{28}$ cm); alte ipoteze o consideră între 1750–5000 de milioane de ani lumină. Probabilitatea unui Univers finit nu este întrutotul dovedită, însă se potrivește cu cea a Universului în expansiune sugerată de deplasarea către roșu a liniilor spectrului în cazul nebuloaselor îndepărtate. Observațiile recente de la Palomar confirmă această deplasare, ca și proporționalitatea

distanțelor cu viteza nebuloaselor; deplasarea însăși ar fi un efect optic Doppler-Fizeau analog cu efectul acustic cunoscut (variația înălțimii percepute a sunetului unei sirene de locomotivă care se deplasează cu mare viteză). Dacă se calculează la ce depărtate viteza nebuloaselor supuse expansiunii atinge viteza luminii, se găsește pentru această distanță cifra de 1.750 milioane de ani lumină. Această cifră, mult mai modestă decât cele pe care le-am amintit mai sus, ar fi, după de Sitter, o limită superioară a razei posibile a Universului. Ar fi nedrept pentru memoria pitagoreicilor și neoplatonicienilor să nu menționăm că pentru ei Universul era limitat, cuprins în „Sfera stelelor fixe": sufletele preafericiților se regăseau în Calea Lactee.

Dacă trecem de la distanțele mari la cele foarte mici care apar în lumea atomică și infraatomică, avem:

raza atomului (1942) este de 10^{-8} cm.

diametrul electronului este de $\frac{1}{100.000}$, cel al celui mai mic atom = 10^{-13} cm.

Raportul între diametrul atomului și cel al nucleului său este de 10.000.

Diametrul nucleului atomului variază de la 10^{-16} cm la 10^{-17} cm.

Alte măsuri mai precise:

Diametrul electronilor planetari $3{,}2 \times 10^{-13}$ cm.

Diametrul nucleului atomului de hidrogen 2×10^{-16} cm.

Diametrul nucleului atomului de aur 2×10^{-12} cm.

Diametrul nucleului atomului de argint $1{,}27 \times 10^{-12}$ cm.

Diametrul nucleului atomului de uraniu $1{,}4 \times 10^{-11}$ cm.

Diametrul atomului de uraniu 5×10^{-8} cm.

O revistă englezească a publicat o scară ingenioasă a dimensiunilor biologice comparate, de la aproape infinit de mic până la colosal; la cele două extremități se găsesc de o parte un copac, sequoia gigantic, din California, și de cealaltă virusurile filtrante percepute doar cu ajutorul microscopului electronic. Dacă ne referim la animalele propriu-zise avem de o parte balena albă de 115 tone și de cealaltă parte cel mai mic animal monocelular autonom (neparazit), *Monas*. Punctul zero al acestei scări l-ar constitui furnica uriașă (sau musca), care cântărește 1 g, depărtată de cele două extreme cu 10^{10}. Ovulul uman se află la 10^5 sub 0. Cel mai mare animal monocelular care a existat vreodată aparținea ordinului Numuliților (foraminifere

fosile); interiorul oului de *Aypiornis* (pasăre uriașă din Madagascar), care cântărea până la 5 kg era o entitate monocelulară vie, însă mai degrabă un parazit decât un animal propriu-zis.

Putem adăuga la cele două extremități ale scării două mase neaparținând lumii vii depărtate fiecare la 10^{28} de zero (furnica): globul terestru și electronul.

NUMERELE TRANSFINITE

Datorită anumitor pasaje din capitolele precedente, introducerea cu întârziere a numerelor transfinite nu-l va mai surprinde pe cititor; el a întâlnit deja anumite proprietăți paradoxale din această secțiune a societății Numerelor, între altele aceea că pot fi egale cu una din părțile lor. Am văzut, de asemenea, că dacă abordăm teoria numerelor, sau mai degrabă concepția de număr, cu ajutorul teoriei mulțimilor și al noțiunii de echivalență a două mulțimi (corespondența univocă și reciprocă a elementelor lor) și dacă trecem de la această echivalență la noțiunea de putere și de număr cardinal, numerele naturale, numerele finite ordinare, se prezintă ca niște cazuri particulare ale unor mulțimi infinite, caracteristica principală a acestor mulțimi infinite fiind aceea pe care am amintit-o: în împărăția transfinitului partea poate fi egală cu întregul, ceea ce nu este cazul pentru numerele sau mulțimile finite.

Am identificat deja un anumit număr de mulțimi finite ale căror puteri sunt echivalente cu aceea a mulțimii numerelor naturale; de exemplu, mulțimea numerelor raționale (întregi și fracționare) și mulțimea numerelor algebrice. Aceasta cuprinde, în afară de mulțimea numerelor raționale, (numere algebrice de gradul întâi), pe cea a numerelor algebrice care pot fi exprimate prin radicali și pe cea a celorlalte numere algebrice, rădăcini ale ecuațiilor de gradul cinci sau de grade mai mari decât cinci, care nu pot fi exprimate prin combinații de radicali. Toate aceste mulțimi (și sumele lor) sunt numărabile și echivalente, au același număr cardinal, cel mai mic număr cardinal transfinit, care este simbolizat de N_0 sau Aleph Zero.

Am mai constatat până acum, cu oarecare surpriză, că numărul punctelor raționale de pe un segment de dreaptă, chiar dacă acestea sunt *dense*, nu numai că nu epuizează numărul total de puncte de pe această dreaptă, dar au chiar și o „măsură" nulă în raport cu acest număr total care se numește mulțimea numerelor reale și conține

toate numerele transcendente. Această ultimă mulțime este deci de un ordin de mărime superior celei a numerelor întregi, raționale sau algebrice (am văzut că mulțimea numerelor algebrice este numărabilă) și va avea ca putere sau număr cardinal un număr mai mare decât N_o; aceste este continuul arhimedic definit mai înainte și îl putem simboliza provizoriu prin C.

C corespunde așadar ca putere tipului de mulțimi numărabile echivalente cu puterea continuului.

Pe de o parte, teoria mulțimilor și a operațiilor care se pot efectua cu ele, stabilită de Cantor, combinată cu teoria generală a permutărilor și a combinărilor, ne arată întâi de toate că în timp ce N_o^2, cea de-a doua putere a infinitului numărabil sau N_o^n, sunt tot numere transfinite de tipul numărabil, 2^{No} dimpotrivă, număr al submulțimilor lui N_o sau al tuturor combinărilor de N_o obiecte luate câte două este un infinit dintr-o clasă superioară lui N_o, un infinit nenumărabil pe care-l vom numi al doilea număr transfinit cardinal, N_1.

Cantor a generalizat prin recurență $2^{No} = N_1$ în $2^{N_{n-1}} = N_n$, n putând lua pe rând toate valorile întregi, iar N_n fiind întotdeauna de o putere mai mare decât cea lui N_{n-1}.

Aceasta dă scara crescătoare a numerelor cardinale transfinite, ivită pe cale iterativă și care nu face decât să traducă faptul că numărul submulțimilor unei mulțimi este de un ordin de mărime mai mare decât cel al mulțimii. Aici, cititorul ar putea avea impresia că fără să-l avertizez îl fac să intre în domeniul, încă nemenționat, al teoriei grupurilor; este într-adevăr vorba mai degrabă de teoria combinărilor și de întrepătrunderea acestor domenii variate; este cu neputință să păstrăm etanșă compartimentarea lor sau măcar să le prezentăm la locul pe care li-l acordă logica sau pur și simplu vechimea.

În timp ce N_o^3 definește mulțimea tuturor aranjamentelor de N_o numere (de exemplu numerele naturale sau numerele algebrice) luate câte 3, mulțime care este încă numărabilă, dimpotrivă 3^{No}, mulțime a tuturor aranjamentelor cu repetiție de trei litere N_o câte N_o are o putere mai mare decât N_o, de fapt aceeași pentru N_1, decât 2^{No}. Avem $2^{No} = 3^{No} = n^{No}$ și chiar N^{No}. Este ispititor și logic să presupui că cele două numere transfinite nenumărabile pe care le-am obținut, adică 2^{No} și C (puterea continuului) sunt identice, adică au aceeași putere, 2^{No} sau $N_1 = C$.

Aceasta este ipoteza continuului, excesiv de logică, foarte probabilă, dar nedovedită riguros, deși Francis Warrain o prezintă ca

incontestabilă. În orice caz, până acum nu a suferit nici o contrazicere și o putem accepta sub beneficiu de inventar. N_1 ar fi atunci (ca „putere a continuului") puterea mulțimii tuturor punctelor de pe o dreaptă, din plan sau din spațiu, a tuturor numerelor transcendente, a tuturor numerelor reale.

$N_2 = 2^{N_1}$, numărul următor pe scara transfinitului, este în acest caz puterea mulțimii submulțimilor tuturor numerelor reale. Este, de asemenea, puterea mulțimii tuturor funcțiilor discontinue.

Începând cu N_2, numerele transfinite cardinale sau *Aleph* plutesc prea sus în abstracție pentru a îngădui să fie identificate sau descrise altfel decât prin legea iterativă a puterilor lor succesive sau a celor ale mulțimilor de submulțimi aferente. O să lăsăm, așadar, deoparte cohortele numerelor cardinale și cascadele lor ritmate pentru a trece la categoria rivală, aceea a numerelor ordinale transfinite. Voi aminti mai întâi cititorului că în domeniul numerelor finite distincția între numerele cardinale și cele ordinale nu este fundamentală; cu același număr 10 putem desemna rezultatul enumerării a zece obiecte, constând în a lua de fiecare dată un obiect până la epuizarea mulțimii, decontul sau numărul ordinal, și caracteristica 10 a mulțimii care îl deosebește de o mulțime de unsprezece sau douăsprezece obiecte, puterea lui sau numărul cardinal. Dimpotrivă, pentru mulțimile transfinite o mulțime cu un număr cardinal dat poate fi aranjată, „ordonată", în mai multe feluri diferite, corespunzând fiecare unui alt tip de ordine sau număr ordinal. Aici are importanță „tipul de ordine"; putem, de pildă, rândui șirul numerelor întregi după creșterea lor naturală 1, 2, 3, 4, 5 sau putem începe cu numerele impare, sau cu numerele pătrate etc.

Aceste tipuri de ordine constau totdeauna în diverse feluri de a ordona mulțimile care au un număr cardinal permanent. Numerele ordinale de prima clasă sunt numere ordinale finite reprezentate de aceleași cifre ca numerele cardinale, șirul numerelor naturale.

1, 2, 3, 4, 5... n, ...

Această mulțime considerată ca fiind completată cu toate numerele întregi ordonate după mărimea crescătoare (mulțimea numărului cardinal N_0) are ca tip de ordine sau număr ordinal simbolul ω, primul număr ordinal transfinit. Mulțimea numerelor întregi, ca și aceea a restului numerelor raționale sau a numerelor algebrice, se poate ordona în diferite feluri, poate produce un număr

infinit de tipuri de ordine sau numere ordinale, pe care le putem grupa în numere ordinale de clasa a doua.

$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots \omega+n, \ldots \omega+\omega=\omega\times 2, \omega\times 2+1, \ldots \omega\times 3, \ldots \omega\times n, \ldots \omega\times\omega=\omega^2.$
$\omega^2+1, \ldots, \omega^2+\omega, \omega^2+\omega+1, \ldots \omega^2+\omega\times 2, \ldots \omega^2+\omega\times\omega=\omega^2\times 2, \ldots \omega^2\cdot 3, \ldots, \omega^2\times\omega=\omega^3, \ldots \omega^4, \ldots \omega^\omega, \omega^\omega+1, \ldots \omega^{\omega+1}, \ldots \omega_\omega \ldots$ etc.

Această mulțime bine ordonată are ca putere cardinală pe aceea a continuului, $2^{No}=N_1$ (dacă acceptăm ipoteza continuului) și reprezintă în același timp un nou tip de ordine, primul număr ordinal de clasa a III-a, simbolizat prin Ω_1; continuăm adăugându-i mai întâi lui Ω_1 numerele ordinale din clasa întâi, apoi pe cele din clasa a II-a, ajungem astfel la o mulțime de putere cardinală N_2, care reprezintă un nou tip de ordine Ω_2, primul număr ordinal din clasa a IV-a ș.a.m.d.

Enumăr aici, fără să intru în amănunt, un șir de teoreme despre mulțimile transfinite care va arunca o altă lumină asupra acestui domeniu ciudat.

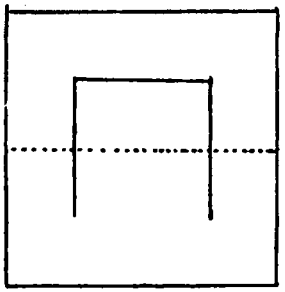
Să notăm mai întâi că continuul de putere N_2 (de exemplu cel al numerelor ordinale din clasa a III-a) nu mai este arhimedic.

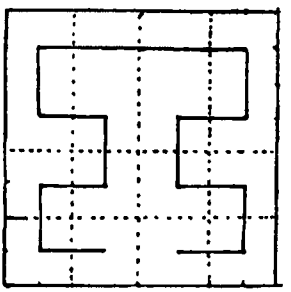
Șirul de Aleph (puteri cardinale) obținut prin clasele de numere ordinale, tipuri de ordine ω, Ω_1 Ω_2 etc., pe care le simbolizăm prin N_o, N_1, N_2 etc. și, se conformează fomulei iterative $2^{Nn-1}=N_n$ care au ca indici numere *ordinale* și dau naștere unei mulțimi de putere N_ω mai mare decât cea a tuturor celor precedente. Unii s-ar mulțumi să se oprească aici; alții vor merge cu entuziasmul până acolo încât vor încerca să genereze $N_{\Omega 1}, N_{\Omega 2}$ etc.

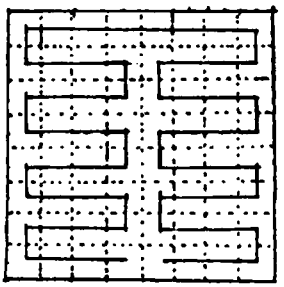
Să citâm teorema lui Zermelo: orice mulțime poate fi considerată ca o mulțime de elemente ale unei mulțimi bine ordonate.

Aranjamente cu repetiții de m litere luate câte n (diferite grupe de n litere care se pot forma cu cele m litere date, litere ce se pot repeta) sunt în număr de m^n; de fapt aceasta aparține teoriei combinărilor, și vom vedea că aceste aranjamente corespund și coeficienților „polinomului lui Leibniz", $(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_m)^n$.

Tot așa cum 3^{No} reprezintă astfel mulțimea aranjamentelor cu repetiții de 3 litere luate câte N_o și are puterea N_1, și cum N_o^3 reprezintă mulțimea tuturor aranjamentelor de N_o litere sau numere luate câte trei și nu mai are decât puterea N_o, tot așa N_o^{No} va simboliza mulțimea tuturor aranjamentelor tuturor numerelor naturale, sau raționale luate câte N_o și va avea puterea N_1.







LA COURBE DE PEANO, CONSTRUCTION.

RUBAN UNILATÉRAL DE MÒBIUS

PLANȘA XI

În acest capitol, consacrat în parte transfinitului, își ocupă locul o entitate ciudată, demnă să figureze în galeria „monștrilor matematici"; este vorba de „curba care trece prin *toate punctele* unei suprafețe plane date susceptibilă de a fi inclusă într-un pătrat", sau Curba lui Peano.

Construcția ei este simplă (ea este începută în planșa XI în trei etape succesive), dovada constă în construcția însăși și în afirmația că, la limită, curba continuată la infinit va fi trecut prin toate centrele micilor pătrate succesive, așadar prin toate punctele reale din pătratul inițial. La limită, curba lui Peano va avea pur și simplu aspectul unui pătrat negru.

Această forfoteală, aceste coborâșuri și suișuri de șiruri infinite, ieșite din imaginația lui Cantor, care la naștere au părut tot atât de arbitrare și inutile și ca numerele imaginare la început, corespund totuși unor ființe matematice virtual posibile (matematica este „știința posibilului");, fără ajutorul numerelor transfinite, astăzi nu am putea să tratăm nu numai problemele teoriei mulțimilor, dar nici pe acelea ale geometriei cu n dimensiuni și ale hiperspațiilor, ale Analysis Situs și ale teoriei funcțiilor în general.

Planșa XI ne mai arată și un alt „monstru" geometric, banda „unilaterală" a lui Möbius care se obține secționând un inel cilindric de hârtie și lipind apoi cele două capete după ce unul a fost răsucit. O muscă sau linia continuă trasată de un creion, vor parcurge toată suprafața benzii întorcându-se în același punct după două înconjurări. Paradoxul este explicat prin faptul că deși banda este unilaterală sau unilateră fiecărui punct îi corespund totuși două suprafețe, o față și un dos.

Să mai citâm și „Curba lui Weierstrass" care, deși este continuă, nu are nici o tangentă. Cât despre problema de a ști dacă mulțimile transfinite de putere numărabilă sau nenumărabilă pot fi nu numai posibile, ci și actuale, dacă ne putem închipui, de pildă, un sistem de stele în Număr N_0 ca existând cu adevărat, această problemă și numeroase altele înrudite țin atât de metafizică cât și de teoria cunoașterii. Ba chiar i-am putea sfătui pe savanții occidentali familiarizați cu transfinitul să facă exerciții de meditație și de contemplație asemănătoare cu cele făcute de înțelepții și savanții hinduși; mai apoi, unele discuții la care să ia parte și filosofi neotomiști, preoți sau laici, cunoscători ai științei moderne, ar putea arunca o lumină nouă și folositoare asupra acestor probleme care țin, totodată, de matematică, de metafizică și de teodicee sau cunoașterea

însușirilor Ființei Supreme. Nu este o butadă; lăsând respectuos de-o parte orice problemă legată de revelație, existența lui Dumnezeu, a unui Dumnezeu, a unui Dumnezeu Creator sau Demiurg este o ipoteză științifică admisă astăzi în mod deschis de fizică-matematică; ea își are locul său în grupul ipotezelor care nu duc la contradicții. Iar studiul însușirilor posibile ale Divinității, însușiri posibile logic sau care fac parte din teologiile comparate ale diferitelor religii, însușirile și caracteristicile șirurilor transfinite, felul în care acestea se întrepătrund, în care pot uneori să se abată cu ușurință de la logica aristotelică, pot sugera proprietăți asemănătoare, dar care nu se găsesc în constituția personalităților finite, care ar permite înțelegerea și rezolvarea anumitor probleme legate de calitățile transcendente și „transfinite" ale rațiunii divine și ale personalităților divine (ubicuitate, percepții simultane în număr infinit etc.).

NOTE

[1] În mulțimile *ordonate* deosebim, de asemenea, pe acelea în care (ca și pentru ordinea întregilor sau a numerelor reale) două elemente oarecare sunt comparabile și cărora li se zice *total ordonate;* printre acestea din urmă găsim mulțimile *bine ordonate* în care orice submulțime, ca și întregii mai mari decât 0, are un element mai mic. Orice mulțime ordonată finită este de altfel *bine ordonată.*

[2] Calculatorul ENIAC a calculat numărul π cu 2035 zecimale în 70 de ore.

CAPITOLUL XI

GEOMETRII CU UN NUMĂR OARECARE DE DIMENSIUNI – TOT DESPRE POLITOPII CU PATRU DIMENSIUNI – ECHIPARTIȚIILE SPAȚIULUI ȘI ALE HIPERSPAȚIILOR – GEOMETRII NEEUCLIDIENE

Acum marele arhitect al universului ni se pare a fi un matematician desăvârșit.

(SIR JAMES JEANS)

Tot așa cum am făcut și în cazul numerelor transfinite, în mai multe din capitolele precedente l-am „imunizat" pe cititor împotriva surprizelor prea brutale care rezultă din introducerea în viața noastră normală a monștrilor geometrici din cea de-a patra dimensiune sau din altele și mai îndepărtate.

De altfel, datorită lui Einstein, contemporanii noștri nu au nevoie de această imunizare, întrucât am fost cu toții informați din când în când că probabil trăim într-o lume cu patru dimensiuni (trei spațiale și una temporală) sau măcar pe suprafața pseudosferică (un volum cu trei dimensiuni) a unui univers curb cu patru dimensiuni.

Această suprafață curbă pseudosferică este în realitate un volum, volumul finit $2\pi^2R^3$, care se poate calcula dacă cunoaștem R, raza Universului.

Suprafețele și volumele curbe aparțin lumii neecludiene; acestea fie nu au nevoie de o lume înconjurătoare cu un număr mai mare de dimensiuni și sunt neecludiene prin structură, fie pot fi curbate într-o lume care are o dimensiune în plus, ca aceea a cărei suprafață, hipersuprafața, ar fi universul curb cu trei dimensiuni pe care-l percepem noi. Așadar o lume curbă cu trei sau patru dimensiuni poate fi ori limitată la ea însăși, socotită ca o încheiere (suprafața unei sfere de pildă), ori curbată într-o lume cu o dimensiune în plus. Aceasta face ca în aceste plimbări prin patru dimensiuni cu care spiritul nostru trebuie să se obișnuiască treptat, a cincea dimensiune dezvăluie câteodată un petic de firmament.

Am văzut deja că existența unui spațiu cu un număr de dimensiuni mai mare decât cele trei ale spațiului nostru obișnuit, cel al simțurilor noastre nemijlocite, fusese sugerată de corespondența riguros exactă dintre construcțiile algebrice cele mai îndrăznețe și o succesiune de imagini geometrice, corespondență deja evidentă în domeniul Numerelor Figurate. Matematicienii din secolul al XIX-lea și-au închipuit mai întâi un spațiu cu patru dimensiuni (cea de-a patra fiind perpendiculară pe celelalte trei) fapt care, deși șochează la început bunul simț cotidian, este tot atât de posibil din punct de vedere logic precum ipoteza unei a treia dimensiuni perpendiculară pe cele două dimensiuni normale ale lumii sale plate pentru o ființă infinit de plată care trăiește într-un spațiu cu două dimensiuni (suprafața unui plan). Este singura explicație pe care ar putea-o da apariției bruște în planul său a unui obiect nou (evident plat), mai cu seamă dacă acest obiect s-ar fi aflat mai întâi într-un alt compartiment al planului și pentru moment ar fi dispărut. Același lucru se întâmplă în lumea noastră cu trei dimensiuni: nu am putea explica decât printr-o a patra dimensiune mutarea unui individ sau a unui obiect solid dintr-un volum închis (dintr-o cameră) într-un alt volum închis; la fel, deznodarea fără tăietură a unui nod, a unei frânghii care nu are capetele libere etc. Însă savanții, de vreo cincizeci de ani încoace, au putut „să vadă" și să construiască proiecțiile în spațiul nostru ale acestor hipersolide regulate cu patru dimensiuni (la Palais de la Découverte sunt expuse două modele, ale hipercorpurilor care prelungesc în spațiul cu patru dimensiuni șirurile pentagon–dodecaedru–C_{120} și pentagon–icosaedru–C_{600}) mai curând după un antrenament progresiv, prin analogii direct algebrice și geometrice, după ce au calculat specificațiile (numărul de vârfuri, laturi, de fețe, de celule sau volume de frontieră) hipercorpurilor sau politopilor regulați din spațiul cu patru dimensiuni.

De atunci, relativitatea generală ne-a familiarizat cu ideea că universul nostru, în aparență tridimensional, ar fi în realitate un univers finit, curbat într-un spațiu cu patru dimensiuni riemanian sau sferic. Să ne mărginim, pentru moment, la o lume euclidiană cu patru dimensiuni, homaloidală (fără curbură), și să urmărim în ce fel octaedroidul sau hipercubul C_8 cu opt celule de frontieră (volume) cuburi, 24 de fețe pătrate, 32 de muchii și 16 vârfuri decurge logic din pătrat (planșa XII).

Am dat deja (capitolul VI) tabelul care arată specificațiile hipercubului pentru spațiile cu un număr oarecare de dimensiuni (acest tabel și tabelul corespunzător pentru hiperoctaedre sunt, după câte știu, inedite); el rezultă din principiul de formare al șirului dipol, pătrat, cub etc.: se operează translația corpului cu n–1 dimensiuni în spațiul cu n dimensiuni cu o lungime egală cu muchia (constantă), apoi se unesc două câte două punctele corespunzătoare ale celor două corpuri; pe planșa XII se vede principiul aplicat îndeosebi hipercubului, pentru trei proiecții diferite. Cât despre hiperoctaedre (tabelul II, capitolul VI), principiul de formare este diferit: se adaugă de fiecare dată două vârfuri simetrice în raport cu centrul figurii corpului din spațiul precedent și se unesc cele două vârfuri noi cu celelalte puncte.

Specificațiile pentru hiperoctaedrul cu n dimensiuni sunt:

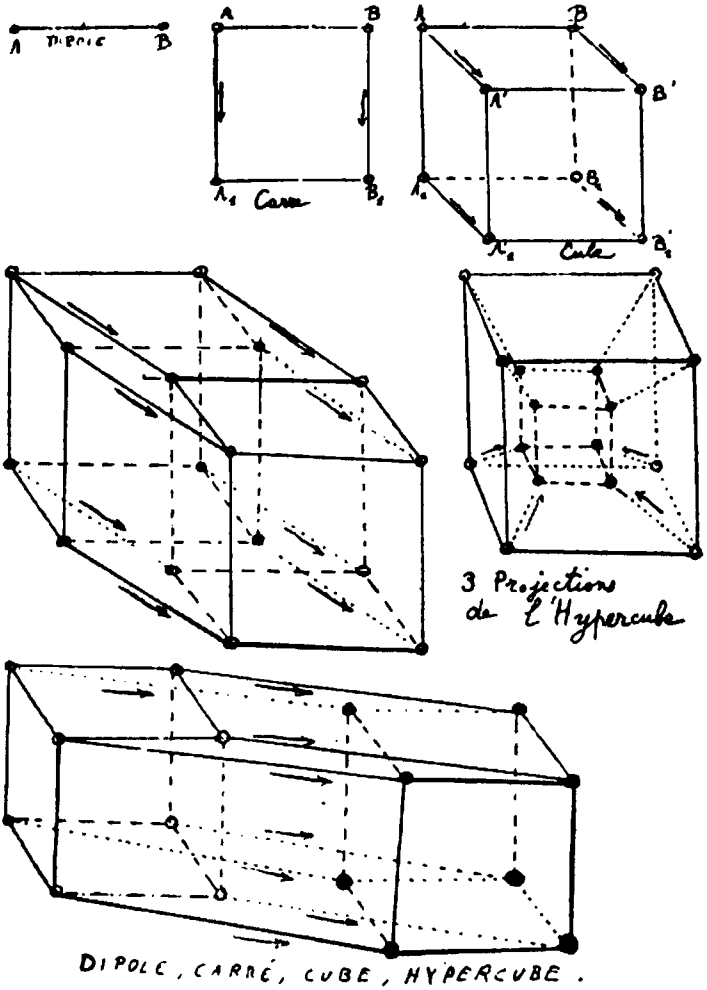
$$1, 2^n, 2^{n-1} \cdot \frac{n}{1}, 2^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, 2^{n-3} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots,$$
$$\ldots 2^{n-k} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}, \ldots, 2^1 \cdot \frac{n}{1}$$

Însuși hiperoctaedrul cu n dimensiuni începe cu 1, continuă cu numărul de celule cu (n–1) dimensiuni și se termină cu numărul vârfurilor, 2n.

Factorul esențial al celui de-al $\overline{K+1}$-lea număr este al $(n-K+1)$-lea număr hiperpiramidal (din șirul triunghiular continuat în K dimensiuni); vedem că aceste numere hiperpiramidale care decurg din triunghiul lui Pascal intervin peste tot, în formarea tuturor hipercorpurilor; în plus, după cum am văzut până acum, acest triunghi dă specificațiile tuturor hipercorpurilor din șirul triunghi, tetraedru etc.

Spațiul cu patru dimensiuni arată 6 corpuri regulate (în loc de 5 în spațiul cu 3 dimensiuni). Tabelul de la pagina următoare (repetat din capitolul III) dă descrierile specifice; vedem că în vreme ce 5 dintre ele decurg direct din cele 5 corpuri regulate cu 3 dimensiuni, C_{24}, deși afiliat în oarecare măsură octaedrului, nu rezultă genetic din el.

După cum am notat deja în capitolul VI, din cercetările lui Francis Warrain (și ale lui Donchian, care a realizat în Statele Unite modele din fire metalice ale proiecțiilor, în spațiul nostru, ale hipercorpurilor din spațiul cu 4 până la 24 dimensiuni) rezultă că, începând cu a cincea


A
B
Dipole
A
B
A1
B1
Carré
A
B
A'
B'
A1
B1
A'1
B'1
Cube
3 Projections de l'Hypercube
DIPOLE, CARRÉ, CUBE, HYPERCUBE.

PLANȘA XII

dimensiune, hipercorpurile derivate din dodecaedru și icosaedru (adică din pentagon) dispar cu totul, nu rămân decât hipercorpurile derivate din tetraedru (șirul triunghiular), din cub și din octaedru. Rezultă de aici că, la prima vedere, Secțiunea de Aur, predominantă în corpurile din șirurile pentagonale, dispare o dată cu pentagonul începând cu a cincea dimensiune. Ea apare totuși indirect în anumite proiecții ortogonale plane ale hipercorpurilor cu mai mult de 4 dimensiuni, după cum s-a arătat în planșa 8, fig. 2, din cap. VI, proiecție plană a hipercubului cu 5 dimensiuni, a cărui diagramă arată trei decagoane legate prin Secțiunea de Aur. Figura 1, din aceeași planșă, arăta o proiecție specială plană a lui C_{120}, – hiperdodecaedru – cu cele 120 de dodecaedre și 720 de pentagoane ale sale, totul dominat de Secțiunea de Aur.

TABELUL III *al celor șase corpuri regulate în spațiul cu 4 dimensiuni sau politopi cu 4 dimensiuni, numite de obicei hiperpoliedre.*

Nume	Simbol	Număr de celule frontieră	Număr de fețe	Număr de laturi	Număr de vârfuri	Corpuri coresp. celor 3 dimensiuni
Pentaedroid sau Hipertetraedru sau Hiperpiramidă	C_5	5 tetraedre	10 triunghiuri	10	5	tetraedru
Octaedroid sau Hipercub	C_8	8 cuburi	24 pătrate	32	16	cub
Hexadeca-edroid	C_{16}	16 tetraedre	32 triunghiuri	24	8	octaedru
Icosatetra-edroid	C_{24}	24 octaedre	96 triunghiuri	96	24	nici unul
Hecatonico-saedroid	C_{120}	120 dodecaedre	720 pentagoane	1200	600	dodecaedru
Hexacosi-edroid	C_{600}	icosaedre 600	1200 triunghiuri	720	120	icosaedru

Deși cubul are, în principiu, ca proporție dominantă $\sqrt{2}$ și tetraedrul $\sqrt{3}$, octaedrul $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$ (în timp ce dodecaedrul și icosaedrul, având originea în pentagon, sunt determinate de $\varnothing = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Secțiune de Aur), cele cinci corpuri regulate din spațiul cu trei dimensiuni sunt atât de strâns înrudite morfologic (se poate trece de la unul la altul prin trasee elementare) încât, fără să apară explicit în structura primelor trei (tetraedru, cub și octaedru), Secțiunea de Aur se află acolo în „putere", de unde și fraza deja citată a lui Campanus de Novara (sec. al XIII-lea), care spune că Secțiunea de Aur leagă logic cele cinci corpuri regulate printr-o *simfonie irațională*. Este singura menționare limpede a Secțiunii de Aur în epoca gotică, ea fiind mai apoi slăvită în cartea lui Pacioli, cu ilustrații de Leonardo (1509), pomenită după aceea pentru ultima oară de Kepler la începutul secolului al XVII-lea ca fiind „una dintre cele două bijuterii ale geometriei. Pe urmă dispare până la mijlocul secolului al XIX-lea (Zeysing)".

Să mai spunem că spațiul cu 4 dimensiuni oferă și corpuri semiregulate care corespund celor 13 poliedre arhimedice din spațiul nostru și care au ca celule sau ca volume frontieră poliedre de mai multe feluri, dar având toate muchiile egale. Specificațiile lor au fost stabilite, de pildă cea a corpului care se obține luând drept vârfuri mijloacele tuturor muchiilor hiperoctaedrului C_{16}; el are 96 de vârfuri, 432 de muchii, 480 de fețe triunghiulare și 120 de icosaedre ca volume frontieră.

Există, de asemenea, în spațiul cu 4 dimensiuni, 10 hiperpoliedre regulate în formă de stea care corespund atât celor două dodecaedre în formă de stea din cea de-a treia dimensiune, cât și pentagramei.

Aspectul cel mai interesant, pentru această lucrare, al geometriei cu 4 dimensiuni este faptul că tocmai numerele figurate ne-au permis să stabilim specificațiile politopilor regulați în oricare spațiu.

Se știe că în spațiul cu două dimensiuni (planul) echipartiția perfectă prin poligoane regulate se obține cu ajutorul pătratului, al triunghiului și al hexagonului regulat (identic, de altfel, cu 6 triunghiuri echilaterale); avem în plus 14 partiții semiregulate, folosind două sau trei tipuri de poligoane regulate, ceea ce înseamnă în total 17 echipartiții.

În spațiul cu 3 dimensiuni cele 5 corpuri regulate nu oferă decât o echipartiție regulată a spațiului prin mijlocirea cubului.

Folosindu-ne de poliedrele semiregulate, arhimedice, obținem o echipartiție semiregulată cu poliedrul lui Kelvin (care are 8 fețe hexagonale și 6 fețe pătrate) și alta cu prisma dreaptă hexagonală regulată (cu muchiile egale).

Am citat deja numerele cuboctaedrice centrate

$1, 13, 55, 147, 309, 561, 923 \ldots, 1 + \frac{n-1}{3}\left(10_n^2 - 5_n + 6\right)$, care ne dau numerele succesive ale sferelor în asamblări de sfere egale tangente (gnomoanele 1, 12, 42, 92, ... etc. oferă numerele sferelor în straturi succesive).

Spre deosebire de spațiul cu două dimensiuni, în care o asamblare de triunghiuri echilaterale produce o echipartiție perfectă în trei dimensiuni, o asamblare regulată de tetraedre nu dă o echipartiție compactă a spațiului.

Am studiat și echipartițiile regulate în spațiul cu 4 dimensiuni; ele pot fi obținute cu politopii următori:

Hipercubul (sau octaedroidul) sau C_8 (în fiecare vârf se întâlnesc 16 politopi), hiperoctaedrul, C_{16} (24 politopi în fiecare vârf) și C_{24} (opt politopi în fiecare vârf). Există și o echipartiție care corespunde celei din spațiul cu 3 dimensiuni prin îmbinarea poliedrelor lui Kelvin; este o îmbinare de politopi semiregulați care au 30 de celule frontiere, dintre care 10 sunt poliedre ale lui Kelvin și 20 prisme drepte hexagonale regulate.

Dintre hipercorpuri să nu uităm șirul hipersferelor ieșite din înrudirea punct, circumferință, sferă etc. Tot așa cum sfera obișnuită are suprafața $4\pi R^2$, hipersfera cu 4 dimensiuni are volumul frontieră sferic $2\pi^2R^3$, ceea ce va permite să se calculeze volumul universului nostru curb îndată ce-i vom cunoaște raza ceva mai exact (după de Sitter, 1750 milioane de ani lumină; după observatorul de la Palomar, 5 mii de milioane de ani lumină).

Hipervolumul sau joja unei hipersfere cu n dimensiuni crește la început, ajunge la un punct maxim după cea de-a VII-a dimensiune, apoi descrește.

Raza hipersferei (sau hipersferoidului) circumscrisă hiperpiramidei cu n dimensniuni este (L muchia hiperpiramidei).

$$Rn = \frac{L}{n+1}\sqrt{n^0 \text{ triunghi triunghiular}} = \frac{L}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Când n crește nedefinit, Rn tinde către $\frac{L}{\sqrt{2}}$.

Individul cu 2 dimensiuni, care trăiește pe suprafața unei sfere, și individul cu 3 dimensiuni, care trăiește în volumul frontieră al unei hipersfere cu 4 dimensiuni, au impresia că trăiesc într-un spațiu neeuclidian riemanian. Este cazul nostru potrivit lui Einstein! Există într-adevăr trei tipuri generale de geometrii imaginabile pentru savanții dintr-un univers locuit, tipuri derivate din trei ipoteze diferite legate de postulatul lui Euclid despre paralele.

Dacă admitem postulatul (printr-un punct putem duce la o dreaptă o paralelă și numai una) ne găsim în geometria euclidiană, homaloidală, fără curbură, în care suma celor trei unghiuri ale unui triunghi este egală cu suma a două unghiuri drepte, 180°, oricare ar fi numărul de dimensiuni ale spațiului.

Această geometrie, care este aceea, aproximativă, a lumii noastre galactice, păstrează în orice translație mărimile și similitudinile figurilor sau volumelor după deplasare. Mai putem numi această geometrie *parabolică*.

Al doilea tip este cel al geometriei neecludiene *hiperbolice*; printr-o dreaptă se pot duce mai multe paralele la o altă dreaptă, suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decât 180°, spațiul are o curbură total negativă.

Geometria hiperbolică s-ar impune unor indivizi care locuiesc pe o pseudosferă, formată într-o suprafață biconcavă cu terminații simetrice asimptotice prin rotirea în jurul asimptotei lor comune a două tactici care se unesc într-un punct de întoarcere comun.

Al treilea tip posibil de geometrie este geometria neeculidiană a lui Riemann, zisă eliptică, cu curbură pozitivă. Printr-un punct nu se poate duce nici o paralelă la o altă dreaptă, iar suma unghiurilor unui triunghi este mai mare de 180°. Am arătat deja că aceasta ar fi geometria unor ființe care trăiesc în volumul frontieră al unei hipersfere cu 4 dimensiuni, a noastră deocamdată.

Nu știm, așadar, dacă spațiul nostru este eliptic sau sferic, curbat într-un spațiu superior euclidian, dar, după cum a arătat Poincaré, nici una dintre aceste trei geometrii nu este în realitate mai *adevărată* decât cealaltă. Iar locuitorii (dacă există) planetelor care aparțin altor galaxii se folosesc poate de convenții și de postulate care se deosebesc mult de ale noastre, dar care sunt potrivite pentru niște condiții fizice și spirituale de existență despre care nu știm nimic.

Punctele noastre de vedere despre aceste domenii încă paradoxale pentru noi, geometrii neecludiene, spații cu un număr oarecare de dimensiuni, numere imaginare, nu sunt elucubrațiile puerile ale unei minți omenești *bombinans in vacuo*, ci uneltele fecunde ale mai multor capitole din fizica matematică.

CAPITOLUL XII

PERMUTĂRI ȘI COMBINĂRI – TOT DESPRE TRIUNGHIUL LUI PASCAL – POLINOMNUL LUI LEIBNIZ – PIRAMIDA ȘI HIPERPIRAMIDA LUI PASCAL – PĂTRATE MAGICE

Unul dintre țelurile urmărite în ultima vreme de matematicieni a fost să definească toate sistemele de numere create de-a lungul veacurilor, numere fracționare, iraționale, algebrice, transfinite, reale, în perechi (cum sunt fracțiile) sau în șiruri de numere întregi. Toate numerele reale putând fi reprezentate prin numerele cuprinse între 0 și 1 (teoria transfinitului și-a arătat aici utilitatea), aceste numere între 0 și 1 pot fi ele însele reprezentate prin șiruri finite sau infinite de numere întregi, acestea din urmă putând fi ritmate în perioade simple sau mixte, sau care, dimpotrivă, nu se supun nici unei legi de succesiune (ca numerele transcendente și numerele algebrice incomensurabile, π și e, ca și $\sqrt{2}$).

Am menționat sistemul ingenios de definire a numerelor reale al lui Dedekind; aici numerele sunt atât tăieturi între șiruri convergente care se întâlnesc la limită pe tăietură, cât și șirurile însele. Și aici teoria transfinitului înlesnește nu numai raționamentul, ci și înțelegerea ipotezei.

Limitându-mă atât cât am putut la numere, am trecut sub tăcere sau am menționat în treacăt o sumedenie de domenii ale matematicii cum ar fi cel al calculului modular, teoria numerelor prime, soluția ecuațiilor algebrice de un grad oarecare, calculul modelelor, în sfârșit întreaga teorie a funcțiilor și disciplinelor conexe, calculul infinitezimal, diferențial și integral, capitolele corespunzătoare din geometria analitică, cea codificată de Descartes, în care orice figură geometrică poate fi descrisă și condensată într-un simbol algebric

mai mult sau mai puțin scurt, și invers, în care oricărei formule, oricărui simbol algebric îi poate corespunde o figură sau o curbă. Tot pitagoreicii au fost cei dintâi care, având concepția Numerelor Figurate, au văzut această corespondență între număr și formă. Am trecut repede peste aceste materii sau le-am lăsat cu totul deoparte (calculul probabilităților, de pildă), deoarece, o spun încă o dată, această lucrare nu este un tratat de istorie a matematicii în general, ci dorește să se limiteze pe cât posibil la istoria Numărului și, atunci când se ivește oricât de puțin, la metafizica Numărului. Vom întâlni ceva mai departe logistica, logica și algebra sau logica simbolică interpenetrându-se deseori, în măsura în care aceste discipline au legătură cu Numărul, dar înainte de aceasta voi prezenta aici un alt capitol din teoria numerelor întregi, în care vom regăsi numerele figurate și spațiile cu 4 sau n dimensiuni. Este domeniul, destul de întins și el, al combinărilor, despre care am spus câte ceva în legătură cu filosofia chineză clasică, în care teoria cunoașterii se folosește mai cu seamă de o mulțime nesfârșită de combinări.

În sensul cel mai general, combinările cuprind două idei conexe, aceea de permutare și aceea de combinare propriu-zisă, care pot la rândul lor să se combine în „aranjamente".

Cel mai simplu concept în acest domeniu este cel al tuturor permutărilor (substituirilor) de n obiecte posibile, adică toate felurile de a dispune aceste n obiecte unul lângă celălalt, importanță având ordinea.

De exemplu, cu 3 obiecte a, b, c, cele șase permutări sunt a b c, a c b, b a c, b c a, c a b, c b a.

Formula generală este

$P_n = n!$ (n factorial, $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$).

De exemplu, numărul de feluri în care 8 persoane pot fi așezate la masă este $P_8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$.

Pentru 10 persoane $P_n = 3.628.800$.

Dacă nu luăm decât un anumit număr p de obiecte dintre care n obiecte date (aranjamente cu repetiție de n obiecte luate câte p):

$$A_n^p = n^p.$$

Ceea ce este adevărat chiar dacă p este mai mare decât n.

Regăsim de pildă cele 8 aranjamente (le putem numi permutări, dar este mai bine să păstrăm acest termen pentru permutările propriu-zise $P_n = n!$) de 2 obiecte luate câte 3, cele 8 Trigrame magice chinezești:

$A_2^3 = 2^3 = 8$

cât și a doua etapă a înmulțirii lor, cele 64 de aranjamente de 8 trigrame luate câte două.

$A_8^2 = 8^2 = 64$

Numărul de combinări fără repetiție de n obiecte luate câte p (n fiind întotdeauna mai mare decât p, întrucât repetarea unui obiect nu poate avea loc într-un grup dat) este

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}.$$

Acestea sunt combinări propriu-zise. De exemplu, pentru a scoate cei patru ași din 52 de cărți de joc trăgând patru cărți ai o șansă din

$$C_{52}^4 = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 270\,275.$$

Dacă permutăm fiecare din aceste combinări (în acest caz contează ordinea)

$$P_n^p = p!C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

(aplicăm formula permutărilor $P_p = p!$ sumei combinărilor, C_n^p).

O broască cu cifru format din combinări de trei litere din 26 dă $P_{26}^3 = 26 \times 25 \times 24 = 15.600$ combinări.

Pentru a explica formula

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

trebuie să reintroducem triunghiul lui Pascal, care s-a arătat deja indispensabil politopilor cu patru dimensiuni.

Fiecare rând al acestui triunghi reprezintă nu numai anumite cazuri particulare ale formulei generale C_n^p, combinări de p obiecte alese din n obiecte diferite, ci și coeficienții dezvoltărilor binoamelor $(x+a)^1, (x+a)^2, (x+a)^3, \ldots (x+a)^n$, coeficientul C_n^p la intersecția celei de-a p + 1 coloane și al celui de-al n + 1 rând fiind egal cu

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n+p-1)}{p!}$$

De exemplu, termenii celui de-al șaselea rând corespund cu dezvoltarea binomului $(x+a)^5$:

$x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$

triunghiul lui Pascal dând în fiecare caz valoarea coeficientului C_n^p.

Al șaptelea rând reprezintă dezvoltarea binomului $(x + a)^6$, în care coeficienții numerici ai lui x vor fi

$C_6^0\ C_6^1\ C_6^2\ C_6^3\ C_6^4\ C_6^5\ C_6^6$

cu convențiile $C_n^o = C_n^n = 1 = C_{n!}^{n!} = 0!$

Suma acestor termeni este egală cu:

$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6 = 64$

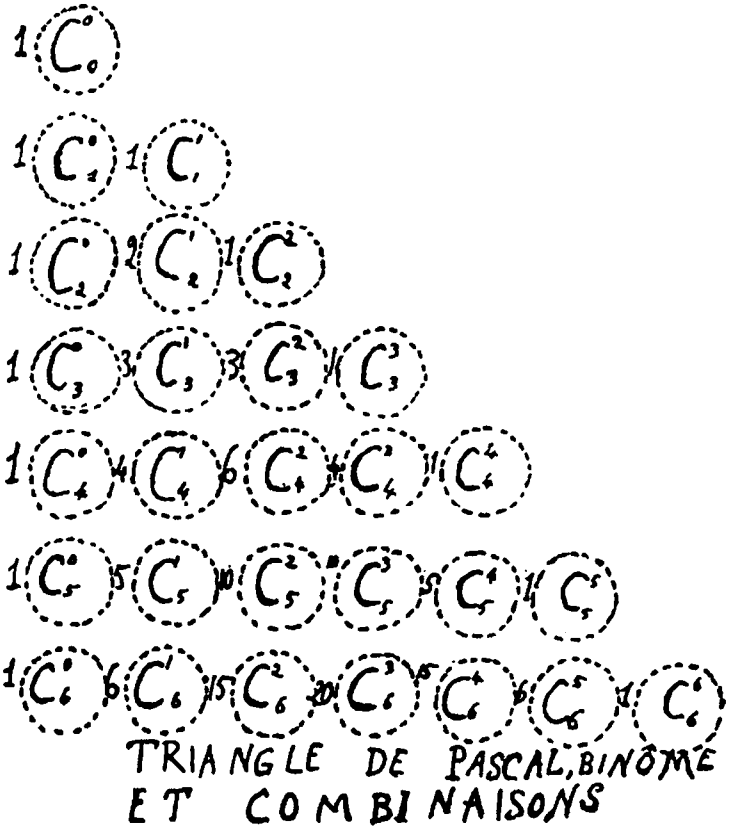
Într-un mod mai general, suma termenilor celui de-al n + 1-lea rând reprezintă 2^n, iar fiecare termen coeficientul numeric corespunzător al lui x în binomul lui Newton, $(x + a)^n$. Avem:

$$(x + a)^n = x^n + \frac{n}{1} \cdot ax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^3x^{n-3} + \ldots, + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-3} \cdot x^2 + \frac{n}{1}a^{n-1} \cdot x + a^n.$$

Suma coeficienților numerici va fi:

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Știm deja că fiecare rând al triunghiului reprezintă (înlăturând diagonala cu cifra 1) specificațiile corpurilor din șirul „bipol", triunghi, tetraedru, hiperpiramidă etc. De exemplu, al patrulea rând 1, 4, 6, 4 dă chiar tetraedrul (1), cele patru fețe, șase laturi, patru vârfuri ale tetraedrului (reprezentând șirul în cea de-a treia dimensiune), al cincilea rând 1, 5, 10, 10, 15, dă, pe lângă hipercorpul însuși (1), cele cinci tetraedre, zece triunghiuri, 10 laturi, 5 vârfuri ale hiperpiramidei (sau hipertetraedrul sau pentaredroidul), iar al n-lea rând dă specificațiile hipercorpului cu n–1 dimensiuni aparținând șirului. Coloanele verticale reprezintă (începând cu a treia) numerele triunghiulare, piramidale, hiperpiramidale etc. a n-a coloană reprezentând numerele figurate cu n–1 dimensiuni; este mai bine ca aici să nu înlăturăm coloana diagonală a cifrelor 1 pentru a putea păstra capetele de șiruri (în mod deosebit cifrele unu).



PLANȘA XIII

Revenind la combinări avem

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!} =$$

$$= C_n^{n-p} = C_n^{n-p,p}.$$

Coeficientul C_n^p reprezintă, așadar, nu numai numărul de combinări posibile de n obiecte luate câte p, ci și pe cel al combinărilor de n obiecte luate câte (n–p), cât și permutările combinărilor de n obiecte de două feluri diferite, p variind de la 0 la n.

Exemplul de $\sum C_n^{n,\,n-p}$ pentru n = 4, patru obiecte de două feluri diferite (coeficienți a lui $(x + a)^4$ sau al cincilea rând din triunghiul lui Pascal, p variind de la 0 la 4).

a a a a 1	a a b b	a b b b
b b b b 1	b b a a	b b a a
a a a b	a b a b	b a b b
b a a a	a b b a	b b a b
a b a a	b a b a	$\sum C_n^{n,\,n-p} = 1+4+6+4+$
a a b a	b a a b	$+1 = 16 = 2^4$

2^4 reprezintă numărul de aranjamente posibile a două litere luate câte patru.

Numărul de combinări de 5 obiecte luate câte trei este al patrulea termen C_5^3 din al șaselea rând din triunghiul lui Pascal, 10. (Avem direct prin

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$$

$$C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10.$$

Pentru cinci obiecte (a, b, c, d, e) combinările sunt abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

Aici nu sunt repetiții, iar ordinea literelor nu are importanță.

C_n^{n-p} este aici $C_5^{5-3} = C_5^2 = \frac{5 \times 4}{2}$ = de asemenea 10.

Combinările sunt cele de 5 obiecte luate câte două: ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, adică tot 10.

$C_n^{n-p,\,p}$ devine aici $C_5^{2,\,3}$ numărul de combinări care se poate face cu 5 obiecte de două feluri diferite, luând n – p = 2 obiecte de un fel și p = 3 obiecte de celălalt fel.

a a a b b	a a b a b	a a b b a	a b a a b	a b a b a
b b b a a	b b a b a	b b a a b	b a b b a	b a b a b

tot 10; aici are importanță ordinea, iar inversările se elimină.

Dacă permutăm cele 10 combinări, C_5^3 (introducând ordinea) obținem aranjamentele $P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

Există o formulă mai generală decât aceea a binomului lui Newton pe care o putem numi multinomul sau polinomul lui Leibniz,

$$(a + b + c + \ldots + l)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots\,\lambda!} \cdot a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$$

$\alpha\,\beta\,\gamma \ldots \lambda$ fiind numere întregi astfel încât $\alpha + \beta + \gamma + \ldots \lambda = m$,

cu alte cuvinte $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ reprezentând toate partițiile întregi ale numărului m.

Tot așa cum binomul $(a + b)^m$ și triunghiul lui Pascal ne dau toate formulele relative la combinările de două feluri de obiecte, la fel și trinomul $(a + b + c)^m$ și o piramidă a lui Pascal, despre care vom vorbi în curând, ne dau formulele combinatorii pentru obiecte de trei feluri diferite, iar cvadrinomul $(a + b + c + d)^m$ și o hiperpiramidă a lui Pascal, pe care triunghiul lui Pascal ne îngăduie să o construim fără greutate, ne dau informații despre combinările de obiecte de patru feluri diferite.

Pentru formula cea mai generală privitoare la combinări de obiecte de n feluri diferite, cea a polinomului lui Leibniz, coeficienții combinatorii nu se prezintă în mod direct, ci, după cum am văzut, prin intermediul partițiilor întregi. Teoria partițiilor este un alt domeniu al teoriei numerelor întregi care ar alcătui un singur volum și este strâns înrudit cu teoria combinărilor multiple. Coeficienții termenului $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$ din polinomul lui Leibniz reprezintă:

1° numărul de permutări al combinării $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$ de obiecte în număr $(\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda)$, cu $\alpha + \beta + \gamma + \ldots \lambda = n$;

2° numărul de feluri în care literele combinării $a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma$ pot fi așezate în m cutii diferite, câte o literă în fiecare cutie. Sumele $\sum$ din formula generală corespund fiecărei partiții a numărului m.

Întorcându-ne la 1° $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ reprezintă una din partițiile lui m în care unele dintre numerele $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ etc. pot fi nule, iar însumarea $\sum$ reprezintă numărul (suma numerelor) tuturor permutărilor posibile pentru *toate* partițiile lui m.

Exemplu. — $(a + b + c + b)^5$

$4^5 = 1024 = 4 \times 60 + 12 \times 20 + 12 \times 30 + 12 \times 5 + 12 \times 5 + 12 \times \times 10 + 4$

(partiții)

$1112 \ldots 60\ a^2\ b\ c\ d$	4 ori ... $\frac{5!}{2!}$	$= 60$
$113 \ldots 20\ a\ b\ c^3$	12 ori ... $\frac{5!}{3!}$	$= 20$
$122 \ldots 30\ a^2\ b^2\ c$	12 ori ... $\frac{5!}{2!\,2!}$	$= 30$
$14 \ldots 5\ a^4\ b$	12 ori ... $\frac{5!}{4!}$	$= 5$
$23 \ldots 10\ a^3\ b^2$	12 ori ... $\frac{5!}{3!\,2!}$	$= 10$
$5 \ldots a^5$	4 ori ... $\frac{5!}{5!}$	$= 1$

60 reprezintă, de exemplu, atât numărul de permutări ale combinării $a^2\ b\ c\ d$ sau a a b c d cu patru obiecte a, b, c, d, cât și numărul de *compuneri* ale partiției 1112 al lui 5.

Alte exemple:

3321 sau $3^2\,21$ este o descompunere a numărului 9, care dă 12 compuneri (corespunzând permutărilor combinării $\alpha, \alpha, \beta, \gamma$)

Cele 12 componente sunt:

3321	3312	3231	3213	3132	3123
2331	2313	2133	1332	1323	1233

sau:

la descompunerea 321 al lui 6 sunt asociate compunerile:

321	312	231	213	132	123

Dar toate partițiile lui 6 (corespunzând combinărilor de tipul $a^\alpha, b^\beta, \ldots l^\lambda$ astfel încât $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda$) sunt la rândul lor

6, 51, 42, 33, 411, 321, 222, 3111, 2211, 21111, 111111.

Intervenția partițiilor în formula multinomului provine, așadar, din faptul că numărul de partiții al lui m este în același timp numărul de combinări ale numerelor $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ astfel încât $\alpha + \beta + \gamma + \ldots \lambda = m$ și numărul de compuneri pentru fiecare partiție este egal cu numărul permutărilor pentru fiecare combinare corespunzătoare (transformarea simbolică constă pur și simplu în înlocuirea cifrelor partițiior prin literele combinărilor, precum 3321 prin $\alpha\ \alpha\ \beta\ \gamma$).

Însumarea totală în formulă cuprinde, așadar, enumerarea permutărilor tuturor combinărilor de litere care se pot forma transcriind în litere partițiile lui m.

m^n este egal cu suma produselor dintre numărul de combinări lor aparținând fiecărui $a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\lambda$ și numărul permutărilor posibile corespunzătoare (m este puterea polinomului, n numărul termenilor).

Cu patru obiecte a, b, c, d și $(a + b + c + d)^5$, cele 12 tipuri de combinări pentru $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 3$

sau $\begin{cases} a\,b\,c^3 \\ a\,b\,c\,c\,c \end{cases}$

vor fi:

$a^3\,b\,c$	$b^3\,a\,c$	$c^3\,a\,b$	$d^3\,a\,b$
$a^3\,d\,c$	$b^3\,a\,d$	$c^3\,b\,d$	$d^3\,a\,c$
$a^3\,b\,d$	$b^3\,d\,c$	$c^3\,a\,d$	$d^3\,b\,c$

iar cele 20 de permutări vor fi:

abccc	baccc	cccab	ccbac	cabcc	cbcca
acbcc	bcacc	cccba	ccbca	cbacc	
accbc	bccac		ccabc	cbcac	
acccb	bccca		ccacb	cacbc	
				caccb	

Fiecare permutare poate fi aplicată fiecăreia dintre cele 12 combinări și vom avea 240 de produse.

Pentru $(a + b + c + d + e)^5$

permutările, adică coeficienții termenilor formei

$a\,b\,c\,d\,e$	vor fi	$120 = 5!$
$a^2\,b\,c\,d$		$60 = \frac{5!}{2!}$
$a\,b\,c^3$		$20 = \frac{5!}{3!}$
$a^2\,b^2\,c$		$30 = \frac{5!}{2!\,2!}$
$a^4\,b$		$5 = \frac{5!}{4!}$
$a^3\,b^2$		$10 = \frac{5!}{3!\,2!}$
a^5		$1 = \frac{5!}{5!}$

$\Sigma = 120 + 1200 + 600 + 900 + 100 + 200 + 5 = 3125 = 5^5$ (m^n dar aici numărul termenilor polinomului și puterea sunt egali, așadar m = n).

Am menționat deja o piramidă și o hiperpiramidă a lui Pascal care introduc spațiile cu 3, 4 și n dimensiuni în teoria combinărilor de 3, 4, sau n obiecte de diferite feluri.

Triunghiul lui Pascal ne permite într-adevăr să stabilim o „Piramidă a lui Pascal" ale cărei secțiuni, paralele cu baza, ne îngăduie la rândul lor să calculăm toate combinările de obiecte de trei feluri diferite, întrucât aceste secțiuni dau coeficienții trinomului $(a + b + c)^m$ pentru oricare valoare a lui m.

De exemplu, cea de a șasea secțiune triunghiulară a piramidei lui Pascal

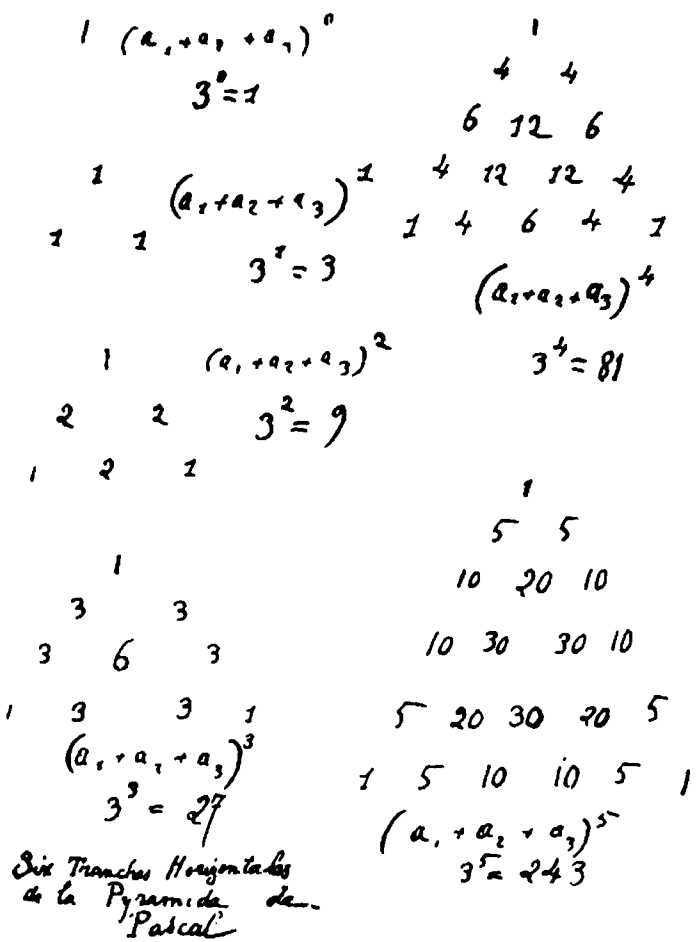
					1							
				5		5						
			10		20		10					
		10		30		30		10				
	5		20		30		20		5			
1		5		10		10		5		1		

dă coeficienții trinomului $(a + b + c)^5$, care reprezintă numerele tuturor combinărilor ce se pot face între 5 obiecte de diferite feluri. Suma acestor numere este $3^5 = 2\,4\,3$.

Formula generală a acestor combinări devine

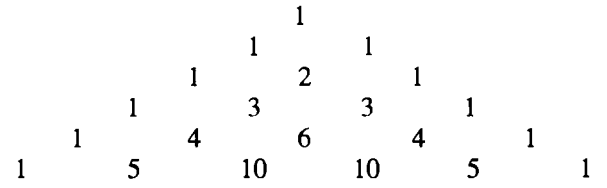
$$C^{n-r-s,\,r,\,s,}_{n} \qquad \text{cu} \qquad \begin{cases} r + s \leq n \\ r \leq n \\ s \leq n \end{cases}$$

Vedem că această secțiune din Piramida lui Pascal nu este un triunghi al lui Pascal propriu-zis; fiecare dintre laturile sale exterioare reprezintă $C_5^0\, C_5^1\, C_5^2\, C_5^3\, C_5^4\, C_5^5$, al șaselea rând al triunghiului lui Pascal a cărui sumă este 2^5.


1 $(a_1+a_2+a_3)^0$
$3^0=1$
1 1 $(a_1+a_2+a_3)^1$
$3^1=3$
1 2 1 $(a_1+a_2+a_3)^2$
$3^2=9$
1 3 3 1
$(a_1+a_2+a_3)^3$
$3^3=27$
Six Tranches Horizontales de la Pyramide de Pascal
1
4 4
6 12 6
4 12 12 4
1 4 6 4 1
$(a_1+a_2+a_3)^4$
$3^4=81$
1
5 5
10 20 10
10 30 30 10
5 20 30 20 5
1 5 10 10 5 1
$(a_1+a_2+a_3)^5$
$3^5=243$

PLANȘA XIV

Suprafețele laterale ale piramidei sunt triunghiuri ale lui Pascal dispuse astfel



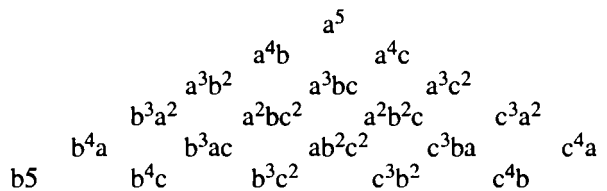
Cele șase secțiuni orizontale ale piramidei lui Pascal sunt reprezentate în tabelul IV planșa XIV.

În fiecare secțiune triunghiulară numerele prezintă o suprafață „baricentrică" cu numere dispuse în jurul unor „centre de greutate".

Revenind la combinări, putem reprezenta această a șasea secțiune a piramidei lui Pascal și ca în tabelul V, planșa XV.

Coeficienții reprezintă numerele de combinări de 5 obiecte de trei feluri diferite în număr de $3^5 = 243$.

Triunghiul se mai poate alcătui și prin tipurile termenilor trinomului $(a + b + c)^5$; cifra corespunzătoare din secțiunea precedentă îi indică coeficientul (de tipul $C_5^p \times C_r^q$ cu p, q, r, variind de la 0 la 5).



Vedem că doar triunghiul lui Pascal permite plasarea tuturor numerelor piramidei lui Pascal și calcularea tuturor combinațiilor posibile între 3 obiecte de diferite feluri (planșele XVI, XVII).

Același procedeu ne permite să alcătuim o hiperpiramidă a lui Pascal reprezentată prin *secțiuni solide*, care vor fi piramide, adică tetraedre regulate reprezentând pe rând combinări de 4 obiecte de diferite feluri luate câte 0, câte 1, câte 2, câte 3, câte 4, câte 5 etc.

Iată diferitele piramide, care sunt secțiunile solide ale unei hiperpiramide (hipertetraedru sau pentaedroid cu 5 vârfuri care reprezintă linia triunghi-tetraedru în cea de-a patra dimensiune) reprezentate prin numerele ce figurează pe muchiile lor. Interesul acestei

diagrame constă în faptul că ea reprezintă, în paralel cu dezvoltările succesive ale cvadrinomului $(a + b + c + d)^n$, numerele tuturor combinărilor de 4 obiecte de feluri diferite luate câte 1, câte 2, câte 3, câte 4, ... câte n. Aici ne vom opri la n = 5.

$$C_5^5 \times C_5^5$$

$$C_5^4 \times C_4^4 \quad C_5^5 \times C_5^4$$

$$C_5^3 \times C_3^3 \quad C_5^4 \times C_4^3 \quad C_5^5 \times C_5^3$$

$$C_5^2 \times C_2^2 \quad C_5^3 \times C_3^2 \quad C_5^4 \times C_4^2 \quad C_5^5 \times C_5^2$$

$$C_5^1 \times C_1^1 \quad C_5^2 \times C_2^1 \quad C_5^3 \times C_3^1 \quad C_5^4 \times C_4^1 \quad C_5^5 \times C_5^1$$

$$C_5^0 \times C_0^0 \quad C_5^1 \times C_1^0 \quad C_5^2 \times C_2^0 \quad C_5^3 \times C_3^0 \quad C_5^4 \times C_4^0 \quad C_5^5 \times C_5^0$$

PLANȘA XV

Structura „baricentrică" (dacă numerele ar reprezenta greutăți) apare în aceste piramide (secțiuni solide ale hiperpiramidei lui Pascal) așa cum apăreau în secțiunile triunghiulare plane ale piramidei lui Pascal.

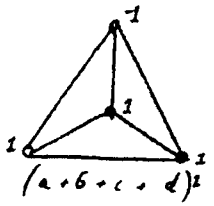
Teoretic, hiperpiramidele în spațiul cu 5, 6 sau n dimensiuni ne permit, de asemenea, să stabilim numerele combinărilor de obiecte de 5, 6 sau n feluri diferite luate câte 1, câte 2, ... câte m, ca și coeficienții dezvoltărilor polinoamelor $(a + b + c + ... + p)^m$ oricare ar fi m și n.

PĂTRATE MAGICE

Înainte să trecem de numerele întregi finite trebuie să semnalez un capitol în care este vorba de ceea ce se poate numi „matematica distractivă", cel al *pătratelor magice*. Am să definesc pe scurt principiul pătratelor magice și voi da câteva exemple.

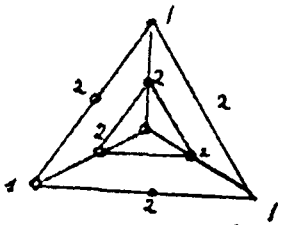
Un pătrat magic normal este alcătuit din n^2 căsuțe egale (n pentru fiecare latură), în care primele n^2 numere întregi sunt aranjate (unul în fiecare căsuță) astfel încât sumele numerelor din fiecare coloană, din fiecare rând și din cele două diagonale să dea aceleași constante.

$(a+b+c+d)^0$ $4^0 = 1$



$(a+b+c+d)^1$

$4^1 = 4$



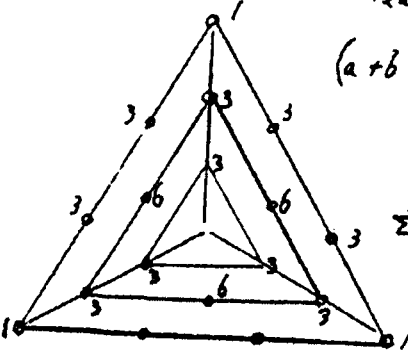
$(a+b+c+d)^2$

$6 \times 2 = 12$

$4 \times 1 = 4$

$\Sigma = 16 = 4^2$

$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$



$(a+b+c+d)^3$

4×1 1

12×3 3 3

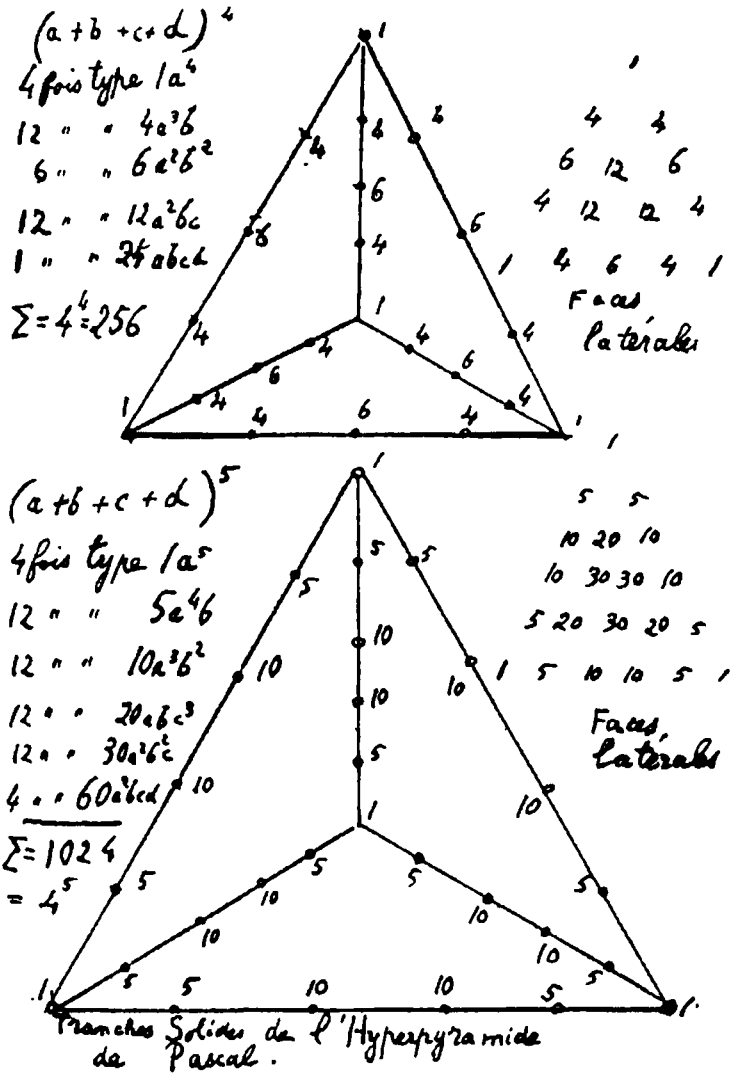
4×6 3 6 3

$\Sigma = 64 = 4^3$ 1 3 3 1

Faces latérales

Tranches Solides de l'Hyperpyramide de Pascal

PLANȘA XVI


(a+b+c+d)⁴
4 fois type 1a⁴
12 " " 4a³b
6 " " 6a²b²
12 " " 12a²bc
1 " " 24abcd
Σ=4⁴=256
Faces latérales
(a+b+c+d)⁵
4 fois type 1a⁵
12 " " 5a⁴b
12 " " 10a³b²
12 " " 20a²bc³
12 " " 30a²b²c
4 " " 60a²bcd
Σ=1024
=4⁵
Faces latérales
Tranches de Pascal.
Solides de l'Hyperpyramide

PLANȘA XVII

Pentru un pătrat dat această constantă se numește „constantă magică" și are ca valoare $\frac{1n}{2}\left(n^2 + 1\right)$.

Numărul n de rânduri sau de coloane dintr-un pătrat magic se numește *ordinul* pătratului; în planșa XVIII sunt arătate pătrate magice de ordinul 3, 4, 5 și 12 (cu 9, 16, ± 25 și 144 de căsuțe).

Un pătrat magic este numit bimagic dacă înlocuind fiecare număr cu pătratul său (puterea a doua) pătratul rămâne magic; de asemenea, un pătrat va fi trimagic dacă putem înlocui fiecare număr prin cubul său (puterea a treia) ș.a.m.d. Aceste pătrate se numesc multimagice.

Teoria pătratelor magice este un domeniu matematic înrudit cu teoria grupurilor de substituție. Nu există nici un procedeu general pentru a alcătui un pătrat magic de un ordin oarecare. De la Loubère și Bachet de Méziriac au dat fiecare câte un procedeu general pentru a construi pătrate magice de ordin impar. Devedec a dat o metodă ceva mai complicată pentru a construi pătrate magice de orice ordin impar. Maurice Kraitchik dă și el o metodă generală bazată pe calculul modular pentru a face pătrate magice de orice ordin impar.

Nu există decât o singură combinare *fundamentală* a pătratului magic normal de ordinul 3; această combinare poate fi diversificată în 8 variante prin rotații, inversări și substituiri ale coloanelor și rândurilor. Dar, cu excepția inversărilor, coloanele, rândurile și chiar diagonalele sunt mereu aceleași. Aceste 8 pătrate magice normale de ordinul 3 (alcătuite din primele $9 = 3 \times 3$ numere) au toate constanta magică $15 = 3 \times \frac{(9 + 1)}{2}$, iar 5 ocupă întotdeauna căsuța centrală. Dau un exemplu în stânga sus în planșa XVIII.

Dintre pătratele magice de ordinul 4 cu 16 căsuțe (constanta magică $4 \times \frac{(16 + 1)}{2} = 34$ îl dau ca exemplu pe cel mai faimos dintre pătratele magice asociate cu arta, cel care figurează în „Melancolia" lui Dürer, simetric față de „Soarele Negru", și în care anul compunerii gravurii, 1514, este încrustat în cele 2 căsuțe mediane din ultimul rând.

CARRÉS MAGIQUES

8	1	6
3	5	7
4	9	2

ordre 3

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

ordre 4
carré magique
de DÜRER (Mélancolia)

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

ordre 5

81	1	113	56	136	24	93	13	125	60	140	28
97	65	33	40	72	104	109	77	45	44	78	108
17	129	49	120	8	88	29	141	61	124	12	32
62	142	30	91	11	123	50	130	18	87	7	119
46	78	110	107	75	43	34	66	98	103	71	39
126	14	94	27	139	59	114	2	82	23	135	55
52	132	20	85	5	117	64	144	32	89	9	128
36	68	100	101	69	37	48	80	112	105	73	41
116	4	84	21	133	53	128	16	96	25	137	57
95	15	127	58	138	26	83	3	115	54	134	22
111	79	47	42	74	106	99	67	35	38	70	102
31	143	63	122	10	90	19	131	51	118	6	86

ordre 12
contient aussi 16 carrés magiques 3×3

PLANȘA XVIII

Cea de-a treia figură din planșa XVIII este un pătrat magic de ordinul 5 și constanta magică $5 \times \frac{(25 + 1)}{2} = 65$.

Cea de-a patra figură este un pătrat magic normal cu 144 de căsuțe, de ordinul 12, cu constanta magică $12 \times \frac{(144 + 1)}{2} = 870$.

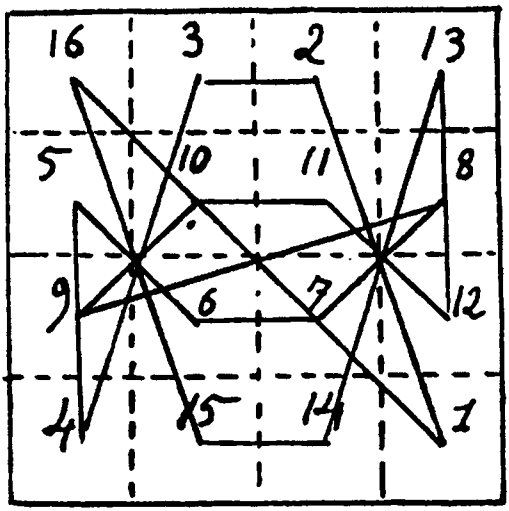
Interesant la acest pătrat magic este faptul că este *compozit*; un pătrat magic compozit de ordinul m × n este un pătrat magic de ordinul m n care poate fi descompus în m^2 pătrate magice de ordinul n. Aici pătratul magic de ordinul $12 = 3 \times 4$ poate fi descompus în $4^2 = 16$ pătrate magice de ordinul 3 cu 9 căsuțe. În mod firesc aceste pătrate de ordinul 3 nu sunt *normale*, adică nu sunt limitate la primele nouă numere, ci intră și în șirul numerelor de la 1 la 144 (12^2). Iar „constantele lor magice" sunt diferite unele de altele întrucât elementele lor sunt toate diferite.

Acest pătrat magic compozit este datorat lui Royal V. Heath, colaborator al interesantei reviste americane *Scripta Mathematica*.

Pătratele magice au afinități sau zone comune nu numai cu teoria grupurilor de transformări și de substituții, și cu teoria simetriei, ci și cu arta decorativă și cu estetica aplicată. Claude Bragdon, arhitect new-yorkez care s-a inspirat și din proiecțiile politopilor (din cea de a patra dimensiune) pentru motive de covoare și de lampioane convexe sau în formă de stea, s-a folosit pentru compoziții ornamentale variate (pe care le mai numește și *projective ornament*) de liniile magice oferite de pătratele magice. Aceste linii unesc, în ordinea mărimii începând cu unitatea (sau cu cel mai mic număr al pătratului dacă acesta nu este normal), toate centrele căsuțelor; figura alăturată oferă pentru pătratul magic al lui Dürer un exemplu de motive ciudate obținute în acest fel. Pentru pătratele cu un număr foarte mare de căsuțe, aceste motive sunt într-adevăr surprinzătoare iar Bragdon, înlocuind dreptele cu niște curbe, a obținut niște motive foarte frumoase, asemănătoare cu ornamentele celtice.

Numeroșii împătimiți de pătrate magice nu s-au sfiit să treacă de la acestea la cuburile magice, al căror principiu este același, dar care sunt mai complicate, având 4 diagonale mari fără să mai punem la socoteală diagonalele celor 6 fețe pătrate. Englezii numesc cuburile magice „Nasik Cubes", după numele orașului din India în care câțiva ofițeri britanici și-au ocupat timpul liber construindu-le;

modelele lor din sticlă (de la Muzeul Științelor din Londra) par niște blocuri de gheață în care sunt întemnițate regimente întregi de cifre roșii sau negre.



Carré de DÜRER
lignes magiques.

CAPITOLUL XIII

LOGISTICA – AXIOMATICILE LUI PEANO ȘI HILBERT – LOGICA CLASICĂ, LOGICA SIMBOLICĂ ȘI LOGICA POZITIVISTĂ

Logica a devenit fizica mulțimilor.
(GONSETH)

Am amintit mai înainte că după clasificarea adoptată astăzi de cei mai mulți filosofi care se ocupă de matematică și de matematicienii care se ocupă de filosofie, matematica și logica fac parte dintr-o știință mai generală numită logistică, ea însăși izvorând din teoria cunoașterii sau epistemologie; matematica este, în această împărțire, știința tuturor ipotezelor coerente (care nu introduc contradicții) posibile. În ceea ce o privește, fizica matematică încearcă să compună o imagine coerentă a lumii exterioare actuale, percepute, și, datorită acestui fapt, a fost nevoită să se folosească din ce în ce mai mult disciplinele matematice și logice abstracte care sunt: teoria tensorilor și teoria grupurilor, despre care vom vorbi într-un alt capitol. Am văzut că uneori un domeniu matematic nou care pare a fi o pură distracție a spiritului, o reverie abstractă, aruncă o lumină nouă și precisă asupra aspectelor necunoscute ale lumii exterioare și putem spune în paralel că Universul real se apropie mult mai mult de anumite universuri matematice abstracte, lumi neecludiene sau cu 4 dimensiuni, cohorte transfinite etc., decât de percepțiile în aparență concrete ale simțurilor noastre.

Am văzut, de asemenea, că definițiile logistice ale Numerelor Divine și științifice ale pitagoreicilor, numerele lui Nicomachos din Gerasa, semănau în mod straniu cu clasele de clase ale lui Whitehead și Bertrand Russell[1]. Vom detalia în continuare două sisteme logistice simple care întemeiază unul aritmetica, celălalt geometria, prin postulate abstracte astfel încât nu rezultă nici o contradicție din ele.

Primul sistem este axiomatica lui Peano, care construiește teoria numerelor întregi și întreaga aritmetică folosindu-se de 5 axiome sau postulate arbitrare:

1° Zero este un număr întreg;

2° Zero nu urmează nici unui număr întreg;

3° Orice număr întreg este urmat de un alt număr care este tot întreg;

4° Două numere întregi sunt egale dacă numerele care le urmează sunt și ele egale;

5° Principiul recurenței sau al inducției totale: Dacă o proprietate este adevărată pentru numărul 1, și dacă se stabilește că este adevărată pentru N + 1 dacă este adevărată pentru N, atunci este adevărată pentru toate numerele întregi.

Principiul inducției totale nu este întemeiat pe raționamentul deductiv silogistic, ci mai degrabă pe principiul analogiei, analogii succesive în relațiile unui număr cu următorul. Putem, de altfel, socoti acest principiu al inducției totale ca o definiție a numărului întreg, ceea ce Peano face implicit.

Paralel cu axiomatica lui Peano pentru aritmetică, o avem pe aceea a lui Hilbert, care este și mai surprinzătoare, întrucât se folosește de convenții *a priori* arbitrare în legătură cu entități abstracte, nedefinite, pentru a construi orice geometrie, domeniu în aparență concret. Mai întâi, Hilbert înlătură ideile, definițiile sau imaginile pe care noi le asociem cu entitățile geometrice și „gândește" 3 clase diferite de obiecte: obiectele din prima clasă vor fi numite *puncte* și desemnate prin literele A, B, C ...; obiectele din cea de-a doua clasă vor fi numite *drepte* și desemnate prin a, b, c ...; obiectele din cea de a treia clasă vor fi numite *plane* și desemnate prin literele α, β, γ ... Între puncte, drepte și plane noi ne închipuim relații mutuale desemnate prin cuvinte ca „între", „a fi situat pe", „egal cu", „paralel", „continuu". Descrierea exactă și complet suficientă pentru a construi întreaga geometrie este obținută prin aceste relații și prin 20 de axiome, dintre care una este axioma lui Euclid (despre paralele) dintre celelalte să citățm de pildă:

1° Dacă un punct B se află între un punct A și un punct C, atunci A, B, C, sunt trei puncte diferite pe o dreaptă, iar B se află și între C și A.

2° Dintre 3 puncte oarecare de pe o dreaptă, numai unul poate fi situat între celelalte două.

Una dintre cele 20 de axiome este axioma lui Arhimede, sau a continuului, a cărei definiție o amintesc: „Dacă AB și CD sunt două segmente de dreaptă oarecare, îl putem înmulți pe CD cu un număr întreg destul de mare, așa încât multiplul astfel obținut să fie mai mare decât segmentul AB".

Sistemul care rezultă din aceste postulate este coerent și poate fi urmărit logic de o persoană care nu are nici o noțiune despre spațiul văzut. Vom întâlni mai departe un alt mod, la fel de abstract, de a aborda geometria, prin teoria grupurilor, care a știut, de asemenea, să pătrundă pe teritoriile celor mai multe discipline algebrice moderne.

Algebra este prin ea însăși bazată pe folosirea simbolurilor, simbolizând mărimi, numere sau operații aritmetice, dar putem numi algebră simbolică o parte din algebra în care nu numai aceste operații ci și relațiile dintre operații sunt exprimate prin simboluri. Această algebră simbolică este o parte din logica simbolică; la rândul ei, aceasta face parte din logistică, cuprinzând logica propriu-zisă și ansamblul matematicilor. Totul, așa cum am arătat până acum, face parte din epistemologie sau teoria cunoașterii, preliminarii și bază a filosofiei (pentru unii întreaga filosofie). Cu toate că logica nu se ocupă *o priori* de numere , o să explorăm puțin logica simbolică pentru a arăta legăturile ei cu matematica. Studiind noțiunile de raport și de proporție am văzut că percepția unui raport de valori sau de mărimi, prin urmare comparația calitativă sau cantitativă, este operația fundamentală a puterii de judecată în general, pentru care raportul matematic sau fracția este un caz particular. Am văzut de asemenea, că analogia, relația sau echivalența dintre două raporturi este o judecată de gradul doi, având drept caz particular proporția geometrică.

O altă noțiune algebrică întrodusă de Whitehead și de Bertrand Russell în logistică și logică este aceea de funcție, $y = f(x)$, unde $f(x)$ este fie un polinom în x cu exponenți și coeficienți întregi, fie o expresie algebrică oarecare, ce implică relația f între „variabila" x și funcția y. În logistică și logică, acest concept devine cel de „funcție propozițională"...; „ X este un Y" este o funcție propozițională.

„François Mauriac este un om" este, dimpotrivă, o propoziție. Înlocuind astfel pe X și pe Y cu niște „constante" A și B, termeni având un sens definit, am căpătat o propoziție care poate fi adevărată sau falsă; dacă A și B sunt valori coerente avem, ca în acest caz, o propoziție adevărată. Dimpotrivă, „platina este o plantă" ne dă o propoziție falsă. *Valorile* unei funcții propoziționale în care s-au înlocuit variabilele cu constante sunt așadar propoziții. Confuzia

între funcții propoziționale și propoziții aduce obscuritate și neînțelegeri într-un text logic sau matematic. Postulatele sunt funcții propoziționale; axioma lui Hilbert de pildă: „două puncte determină o dreaptă" s-ar putea citi și „doi x determină un y", căci cuvintele *punct* și *dreaptă* nu au fost definite. Teorema care exprimă o afirmație logică sau matematică este și ea o funcție propozițională. Postulatele și teoremele sunt legate prin implicație logică și nu sunt nici adevărate, nici false. Totuși, „P implică T" nu este o funcție propozițională, ci o propoziție care este adevărată sau falsă; este o propoziție *ipotetică*.

O propoziție care nu este ipotetică este categorică. O propoziție matematică este o propoziție ipotetică definitivă; o propoziție științifică este o propoziție categorică definitivă. Adevărul științific nu are altă dovadă decât observația, adevărul matematic nu are ca dovadă decât deducția formală, se referă la formă, nu la conținut. Matematica satisface curiozitatea în legătură cu ceea ce este logic posibil; curiozitatea științifică se ocupă de *lumea actuală* (care poate fi mai puțin reală decât lumea matematică). Adevărul științific trăiește în lumea *faptelor* propoziționale, adevărul matematic în aceea a *formei* propoziționale, cea dintâi având drept instrumente observația și gândirea empirică, cea de-a doua deducția și inducția. Însă teoria matematică a invarianței, de pildă, (ideea „permanenței prin schimbări") are o influență uriașă asupra cunoașterii de către noi a lumii concrete.

Exemplu de implicație logico-matematică:

„Dacă fiecare x este un y și fiecare y este un z, atunci orice x este un z"; aceasta nu este o funcție propozițională (în ciuda variabilelor) ci o adevărată propoziție care este de altfel adevărată, o implicație independentă de conținut.

Se poate spune că matematica este știința consecințelor ipotezelor (a tuturor consecințelor posibile ale tuturor ipotezelor coerente); domeniul său coincide cu cel al „implicației logice".

Dimpotrivă, domeniul științei este cel al tuturor întrebărilor privitoare la lumea actuală, vie sau nevie, organică sau anorganică, materială sau imaterială, fizică sau psihică. Iată două definiții ale logicii date de Peirce, unul dintre precursorii logicii simbolice de astăzi:

„Logica este teoria gândirii controlate, știința legilor generale despre «semne și simboluri»."

Și:

„Logica este teoria judecății corecte."

Tot Peirce a născocit, între altele, cuvântul pragmatism[2].

El a mai scris:

„Există ceva în natură cu care este analog spiritul omenesc. Natura fecundează spiritul omenesc, sugerează idei care dezvoltându-se se aseamănă cu mama lor, natura".

Ecou îndepărtat, dar precis al principiului analogiei al lui Pythagoras și prefigurare a declarației lui Eddington care afirma că structura universului este conformă cu teoria grupurilor, și la fel cea a gândirii omenești.

Matematicianul își amintește de peștera lui Platon și pentru el ceea ce este veșnic este o lume, un cosmos în care universul existenței actuale nu este nimic altceva decât un „loc geometric" arbitrar sau un vis; țelul pe care-l urmărește este să descopere lumea reală, soarele care proiectează umbrele pe zidul peșterii.

În ceea ce-l privește pe logicianul pur, acesta ar fi ispitit să spună că *structura* unui limbaj logic desăvârșit ar putea fi asemănătoare cu structura lumii (ar exista același „motiv" în relațiile dintre termenii unei propoziții ca și între relațiile dintre entitățile desemnate prin acești termeni. Iarăși analogie).

Și astfel ajungem la școala logicienilor pozitiviști sau empiriști (urmași ai faimoasei „Școli de la Viena") care au încercat să elimine filosofia și metafizica în folosul unei „Sintaxe logice" sau logică sintactică și care acordă, pe deasupra, o importanță capitală analizei semnificației cuvintelor și legăturilor dintre ele.

Ea a introdus în studiul limbajului o distincție între limbajul științelor și limbajul emotiv, acesta din urmă fiind pentru ei lipsit de sens. Deducțiile lor se pierd, în general, într-o logică simbolică confuză și câteodată arbitrară. Dihotomia limbajului este imperfectă dacă o comparăm cu aceea, precisă și limpede, stabilită de Pius Servien care l-a clasificat în „limbaj al științelor" și „limbaj liric"; metoda lui Pius Servien rezolvă cu ușurință toate problemele în care se împotmolește „logica pozitivistă". O vom vedea în amănunt în capitolul care se ocupă îndeosebi de numere și de ritm în limbaj.

Logica normală folosește trei forme de raționament (de metode pentru a dobândi judecăți corecte):

1° Prin silogism (raționament deductiv static); identificarea parțială a unui individ sau a unui grup ca făcând parte dintr-o clasă,

ținând de proprietățile sale. Este metoda analitică, ba chiar tautologică, care nu adaugă nimic nou conținutului inițial. De fapt, silogismul este o tautologie voalată, dar în ciuda acestui fapt rămâne un procedeu de raționament foarte util întrucât este „exhaustiv", epuizează anumite posibilități logice care fără el ar putea fi trecute cu vederea și elimină automat contradicțiile[3].

Exemplu de enunț tautologic (decurgând din definiții prealabile): „Orice bucată de fier este o bucată de metal."

Și un enunț empiric (netautologic):

„Toate bucățile de fier de pe această masă sunt rotunde".

2° Raționament prin analogie, identificare a două relații sau a două structuri; este un raționament „dinamic" care lărgește conținutul. Principiul inducției totale este un raționament analogic inductiv.

3° Raționament prin analiză combinatorie. Este metoda chinezească folosită de Yi-Jing sau Cartea Schimbărilor (cap.VIII); este înrudită mai degrabă cu silogismul, cu metoda deductivă, prin aceea că în anumite cazuri este exhaustivă, produce toate combinările posibile și permite eliminarea combinărilor de prisos.

Raționamentul deductiv silogistic se potrivește cel mai bine cu tehnica logicii simbolice sau algebrice întrucât folosește un simbolism analog cu cel al algebrei propriu-zise. simbolurile logicii silogistice clasice le precedă pe cele ale logicii simbolice moderne; am să prezint în continuare pe scurt câteva dintre acestea, moștenite de la metodele scolastice. Teoria silogismului clasic stabilește mai întâi patru forme, A, E, I, O, de enunțuri existențiale, patru tipuri de ceea ce numim astăzi „funcții propoziționale".

A Orice S este P
E Nici un S nu este P
I Unii S sunt P
O Unii S nu sunt P

Orice element al unui silogism categoric trebuie să aibă una din formele A, E, I, O.

Primul principiu scolastic al silogismului spune: „Orice este atribuit în mod afirmativ sau negativ unui termen care figurează în silogism poate fi atribuit în același fel fiecărui lucru conținut în clasa specificată de acest termen".

Aristotel: *Dictum de omnis et nullo*. „Quidquid de omnibus valet, valet etiam de quibusdam et singulis; quidquid de nullo valet, nec de quibusdam et singulis valet".

Acest dicton, „de omnis et nullo", stabilește un raport de dependență între primul, al doilea și al treilea termen al silogismului. Al doilea principiu (enunțat tot de Aristotel) este, „principiul de coeziune" (raport de echivalență între doi dintre cei trei termeni dacă silogismul este cu concluzie afirmativă, dar negându-l pe al treilea când silogismul este cu concluzie negativă):

„Nota notae est etiam nota rei ipsius; repugnans notae repugnat rei ipsi" (*Nota* înseamnă, alternativ, termenul silogismului și afirmația sau negația exprimată prin el).

Cele patru tipuri A, E, I, O aranjate în grupuri de câte trei (cu repetiții) produc 64 de moduri (combinare de patru obiecte luate câte trei, $4^3 = 64$).

De exemplu: A A A

clasicul: Toți oamenii sunt muritori.

Socrate este un om.

Socrate este muritor.

Ca structură avem: premisă majoră, premisă minoră, concluzie. Dintre cele 64 de moduri menționate mai înainte (combinări de câte trei luate câtre trei ale celor patru elemente A, E, I, O) numai o minoritate de 19 este teoretic validă; eliminând identitățile și modurile zise subalterne, rămân 11 moduri diferite practice:

AAA, EAE, AII, EIO, AEE, AOA, AAI, IAI, EAO, OAO, AEO.

Toate acestea au fost condensate în ingeniosul poem în pseudolatină macaronadică:

Barbara Celarent Darii Ferio *Prioris*
Cesare Camestres Festino Baroko *Secundae*
Tertia Darapti Disamis Datisi Felapton
Bokardo Ferison *habet quarto insupra addit*
Bramantip Camenes Dimaris Fesapo Fredison

(Combinația A E O, „validă însă subalternă", nu figurează în „poem".)

În fiecare cuvânt numai vocalele contează (cuvintele subliniate nu contează) alcătuind astfel grupurile sau modurile AAA, EAE etc. Întâmplător, simbolurile A, E, I, O sunt socotite a fi ieșit din AffIrmo și nEgO.

Combinațiile din rândul care începe cu cuvântul *Barbara* alcătuiesc prima figură a silogismului, cele din rândul care începe

cu *Cesare* pe cea de a doua, cele din rândul care începe cu *Darapti* (Tertia nu intră la socoteală) pe o a treia, cea din rândul care începe cu Bramantip alcătuiește a patra figură.

De exemplu: Celarent

E Nici un lucru plictisitor nu este popular.
A Orice muncă de rutină este plictisitoare.
E Nici o muncă de rutină nu este populară.

Festino

E Oamenii buni nu sunt niciodată cinici.
I Unii oameni de geniu sunt cinici.
O Unii oameni de geniu nu sunt buni.

Felapton

E Nici un tratat de logică nu este o lectură ușoară.
A Orice roman este o lectură ușoară.
O Unele tratate de logică nu sunt romane.

(O este adevărat, dar incomplet; rezultă din premise că nici un tratat de logică nu este un roman.)

Logica simbolică modernă se folosește de simboluri pseudoalgebrice:

•	și ... conjuncție
V	sau ... Disjuncție
⊃	implică... implicație (Dacă... atunci)
—, ~	nu... negație
(x)	pentru orice x
f(x)	ca în algebră, funcție de x
σ	... un enunț
∃	... există
≡	... echivalență
=	... identitate
M (P)	P este M (proprietatea sau calitatea P are și proprietatea M).

Iată cum se scriu, de pildă, cele patru tipuri ale elementelor silogismului, A, E, I, O:

A: orice S este P (x) (f x $\supset$ g x)
E: nici un S nu este P(x) (f x $\supset$ – gx).
I: unii S sunt P ($\exists$ x) (fx · gx)
O: unii S nu sunt P ($\exists$ x) fx V g x).

Funcțiile f și g semnifică: x aparține clasei (definită de funcțiile f sau g).

Principiul Terțiului Exclus (nu se poate în același timp A și non A) se scrie $\sigma_1 V \sim \sigma_1$.

O axiomă logică și algebrică:

„Dacă enunțul 1 implică enunțul 2 și dacă 2 îl implică pe 3, atunci 1 îl implică pe 3" este simbolizată prin:

$$(\sigma_1 \supset \sigma_2) \cdot (\sigma_2 \supset \sigma_3) \supset (\sigma_1 \supset \sigma_2)$$

„Tabelele de adevăr" se combină cu enunțurile „moleculare"[4] și joacă un rol însemnat în analiza logică a logicienilor pozitiviști din Școala de la Viena și din filialele acesteia stabilite acum în universitățile americane (în frunte cu Carnap, Wittgenstein etc.). Exemplu:dacă p și q sunt două propoziții, dacă V înseamnă *sau* deasupra coloanelor, dar „este *adevărat*" în coloane și F înseamnă „este fals", atunci vom avea „tabelul de adevăr":

p	q	p . q	pVq	p $\supset$ q
V	V	V	V	V
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	F	F	F	V

Aceste „tabele de adevăr" sunt în general întemeiate pe logica bivalentă și admit principiul contradicției și pe cel al terțiului exclus. Dacă în loc de două propoziții p și q avem trei, p, q și r, tabelul va avea $2^3 = 8$ rânduri; dacă avem 4 propoziții, vom avea $2^4 = 16$ rânduri etc.

Boole, cu lucrarea sa „Enquête sur les lois de la pensée" (1854), a fost întemeietorul logicii simbolice.

Primele două coloane constituie premisele sau ipotezele simultane care anunță fapte afirmate sau presupuse pentru propozițiile p

și q, ultimele două coloane dau rezultate logice privitor la adevărul sau neadevărul lui p și q, luate împreună sau la unul sau altul din cele două enunțuri.

Să notăm că logica modernă a ridicat numărul modurilor silogistice posibile de la $4^3 = 64$ la $2^{13} = 64 \times 128 = 8.192$

În ciuda mecanismelor tautologice ale raționamentului silogistic, logica simbolică modernă a scos de aici unele rezultate folositoare datorită facultăților „exhaustive" și eliminatorii ale procedeului.

Însă ambiția Școlii de la Viena de a înlocui filosofia și metafizica cu analiza simbolică „sintactică" și cu observații empirice obiective a dat greș pentru bunul motiv că, după cum știm, mecanica silogistică nu dă niciodată ca rezultat altceva decât ce i s-a dat la început (la fel ca distribuitoarele automate din gări) și pentru că afirmația logicienilor pozitiviști, potrivit căreia toate cunoștințele pot fi obținute și clasificate ca urmare a acestor calcule silogistice, tautologice, pe de o parte, ca niște observații științifice empirice, obiective, pe de alta, ignoră faptul că observațiile științifice în discuție (calificate cu termenul, prost ales de empirice în cinstea empirismului materialist al lui Locke etc.) sunt, în ultimă instanță subiective întrucât vin de la observatorul care trebuie să citească și să coordoneze indicațiile date de instrumente.

Carnap, șeful Școlii de la Viena reconstituite, un om remarcabil de altfel, citează trei feluri de a enunța o propoziție: modul *obiectiv* (al „bunului simț"), modul material (pe care îl numește *semantic*) și modul *sintactic* sau formal, cel pe care-l recomandă.

Iată exemple de diferite enunțuri după cele trei moduri:

Modul obiectiv	Modul semantic	Modul formal sau sintactic
5 este un număr prim.	5 nu este un lucru ci un număr.	5 nu este un lucru–număr ci un cuvânt–număr.
Babilon era un oraș mare.	Babilon a fost menționat în conferința de ieri.	Cuvântul „Babilon" a fost folosit în conferința de ieri.

Sau

în loc de:	trebuie spus:
Lumea este ansamblul global al faptelor, nu al lucrurilor (modul semantic).	Știința este un ansamblu de propoziții și nu de nume.

Las cititorului grija de a aprecia eventualele avantaje ale modului sintactic.

Una dintre afirmațiile doctrinare ale logicienilor pozitiviști este aceea că orice enunț trebuie să fie făcut la modul (gramatical) indicativ, pentru a putea afirma astfel rigoarea propozițiilor lor „empirice" („Un enunț valabil este o informație care poate fi comunicată la modul indicativ". Exemplu: Ceci rouge maintenant). Ei citează și butada lui Poincaré: „Dintr-un indicativ nu poți deduce un imperativ", aceasta pentru a exclude din filosofia lor nu numai subiectivitatea observatorilor, ci și orice etică sau morală normativă categorică. Etica și morala nu își au locul în enunțurile lor tautologice sau empirice. În felul acesta, filosofia lor devenise un materialism îngust, nu dialectic, ci sintactic (întemeiat pe sintaxă și pe înțelesul cuvintelor și al propozițiilor); recent însă Carnap și-a dat seama de impasul în care acest fanatism antimetafizic împinsese grupul său și a deschis o breșă prin care subiectul gânditor și chiar metafizica s-au întors triumfători (el a acordat o valoare probantă modului semantic)[5].

La urma urmei, *Cogito ergo sum* este experiența „empirică" fundamentală și totodată baza metafizicii.

Între timp, discipolii lui Carnap construiseră cu multă râvnă un „calcul metapropozițional" care cuprindea atât „metamatematica", cât și „metalogica" fără să mai punem la socoteală „semantica" și semiotica.

Ar fi nedrept să pretindem că logica pozitivistă nu a adus nici un serviciu epistemologiei; insistența ei asupra rolului însemnat al semnificației exacte a cuvintelor și a frazelor, cât și analiza meticuloasă a definițiilor adevărului și falsului[6] s-au bucurat de o mare influență[7].

„Semantica generală" vrea să fie „o tehnică psihologică cu rolul de a-i ajuta pe oameni să se întrebe: „De fapt, ce vreau să spun?" Întrebarea „Despre ce este vorba"? a lui Foch.) Și dacă ne întoarcem de la logica pozitivistă la logica propriu-zisă este de prisos să insistăm asupra însemnatelor foloase pe care teoriile și notațiile lui Whitehead, Russell, Couturat, Peano, Hilbert, Dedekind le-au adus științei matematice și teoriei cunoașterii în general.

Tot așa cum am văzut ivindu-se geometrii neecludiene și nearhimedice, tot așa unii logicieni pozitiviști (Reichenbach, Korzybski) au născocit logici nearistotelice, înlăturând de pildă principiul

terțiului exclus. Să citățm logica trivalentă a lui Reichenbach, care admite trei nuanțe ale adevărului: adevăratul, falsul și nedeterminatul. Aici ¬¬ B înseamnă: B este nedeterminat. AV¬ A →¬¬ B înseamnă: Dacă A este adevărat sau fals, B este nedeterminat. Există chiar și logici „polivalente", în care adevăratul este difractat prin prisma analizei în procentaje variate care introduc probabilitățile. Toate acestea sunt, de altfel, întrutotul legitime.

Și totuși raționamentul analogic, fiind deosebit de formulele silogistice, a câștigat în ultima vreme teren. Logiciana engleză Dorothy Emmett afirmă că:

„Cele mai multe dintre raționamentele sau postulatele metafizice, religioase, estetice, științifice, istorice sunt efectuate «în mod analogic». Față de gândirea analitică, silogistică, gândirea analogică este transcendentă, extrapolantă; este selectivă și poate «prevedea»; dimpotrivă, tehnica silogistică este alcătuită din tautologii sau mai degrabă din truisme obținute prin substituiri și eliminări".

Paul Claudel spunea:

„Logica veche avea drept instrument silogismul, aceasta din urmă are metafora".

Or, cine zice metaforă zice analogie.

Pentru a încheia aceste considerații despre logica simbolică, să mai dăm un exemplu de logică sau mai degrabă de metafizică combinatorie, exemplu luat din Yoga brahmano-budhistă, în care, la fel ca A, E, I, O, din logistica scolastică sau precum cele 8 trigrame magice din Yi-Jing, cele trei sunete A, U, M (sunetele, iar nu imaginile) dau, prin combinări, cheia adevărurilor esențiale.

Aici A este Eul

U este Noneul

M este Negația.

NOTE

[1] Într-adevăr, un număr întreg este pentru aceștia „clasa tuturor claselor care au o corespondență univocă și reciprocă cu o mulțime finită dată".

[2] Condensarea pragmatismului: „Ceea ce este adevărat este folositor"; a hedonismului: „ceea ce este adevărat este plăcut"; a esteticii: „Ceea ce este adevărat este frumos".

[3] În general, tantologia este produsul unei concluzii evidente care decurge din premise; aceasta implică de multe ori repetarea în termeni diferiți a aceleași idei.

[4] Iată 5 „formule moleculare" (p și q sunt propoziții)

$[pV(qVr)] \supset [(pVq)Vr]$

$(pVq) \supset p$

$q \supset (pVq)$

$pVq \supset qVp$

$(q \supset r) \supset [(pVq) \supset (pVr)]$

[5] Cititorul va fi observat înțelesurile deosebite ale cuvântului semantic (semantics) în America și în Franța. În America, după Școala Pozitivistă, semantica este unul din cele 3 domenii ale logicii sintactice (sintactic, semantic, pragmatic), cel în care apar relațiile dintre subiect și cuvinte.

[6] Este momentul să amintim încă o dată sfatul pe care Confucius i l-a dat prințului Ling, de care am pomenit în primul capitol, și care începe astfel: „Puneți în ordine denumirile. Când denumirile sunt incorecte, raționamentele sunt incoerente ..."

[7] Două definiții ale Adevărului. Whitehead: „Adevărul este identificarea aparenței și a realității". Sfântul Toma: „Verum est adequatio rei et intellectus", Adevărul este identificarea (sau suprapunerea) lucrului real și a intelectului. Și cea a preotului Mac Murrin: „Domeniul Adevărului este mai întins decât cel al verificării. Domeniul faptelor este mai întins decât cel al experienței și îl cuprinde. O frază ce nu poate fi verificată poate fi adevărată deoarece corespunde unui fapt: „Aceasta este împotriva etichetelor și dogmelor celor mai sfinte ale logicienilor pozitiviști.

CAPITOLUL XIV

CIBERNETICA

„Ce ți-e și cu demonul analogiei abstracte! De-ați ști prin ce chinuri mă face uneori să trec! Îmi șoptea să compar transformarea de nedescris care se petrecea în mine cu o schimbare bruscă a unor probabilități *mentale"*

(Paul VALÉRY, Monsieur Teste,
Scrisoare de la un prieten)

Vom aborda în acest capitol, sau mai degrabă vom vorbi în treacăt despre o nouă știință, *Cibernetica*, numită după cuvântul grecesc κυβερνητής („omul care ține bara cârmei", cuvântul are ecourile: cârmă, cârmuire), știința care calculează, construiește și studiază noile mașini de calculat, am fi ispitiți să scriem „mașini de gândit" sau măcar „de rațional logic".

În lucrările de sinteză consacrate acestor mașini, autorii au adăugat, pe lângă simple descrieri tehnice, considerații psihologice și chiar filosofice despre unele asemănări între modul de funcționare al acestor mașini și cel al creierului uman.

Pe când visa la „analiza sa combinatorie", logică simbolică universală care să-i ofere enunțurile tuturor ipotezelor posibile, științifice și filosofice, Leibniz se gândise și la un instrument, o mașină care să execute operațiile mecanice necesare. Logisticienii moderni au clădit, până la un anumit punct, analiza combinatorie ideală la care năzuia Leibniz; el ar fi fost cu siguranță încântat de axiomaticile lui Peano și ale lui Hilbert și de legiunile transfinite ale lui Cantor. Cât despre „mașina de rațional corect", aceasta există și constituie obiectul noii științe căreia îi este închinat acest capitol. Cel care a inventat-o și aproape că a realizat-o a fost un ofițer de artilerie britanic, colonelul Babbage, care, în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, și-a închipuit mai întâi o mașină de calculat bazată pe calculul diferențelor întregi (calculul despre care am pomenit în legătură cu Numerele Figurate ale anticilor și cu „gnomonii" lor).

Nu era vorba aici doar de a mânui șiruri de numere întregi, luate arbitrar, ci și despre funcțiile algebrice de forma $y = f(x)$, în care i se atribuia lui x valori întregi succesive și se stabilea cu ajutorul mașinii suita de diferențe Δy valorilor succesive corespunzătoare ale funcției y. Este un procedeu analog cu diferențierea propriu-zisă, dy, numai că rămânem în domeniul întregului finit în loc să ajungem în acela al infinitului mic; simbolurile sunt Δ_1, Δ_2, Δ_3 pentru diferențele prime, secunde etc.

De exemplu $y = f(x) = x^2$.

x	y	Δ_1	Δ_2	Δ_3
1	1			
		3		
2	4		2	
		5		0
3	9		2	
		7		0
4	16		2	
		9		0
5	25		2	
		11		0
6	36		2	
		13		0
7	49			

Diferențele secunde sunt diferențele diferențelor prime ș.a.m.d.; întrucât avem o funcție de gradul al II-lea, diferențele secunde sunt constante (egale cu 2) ca în diferențierea propriu-zisă. Aceste șiruri ne dau informații foarte precise despre structura funcției, mai complete într-un anumit sens decât simpla $dy = 2x \cdot dx$ dată de calculul diferențial propriu-zis (cel care folosește infiniturile mici). Vedem, totodată, că plecând de la Δ_3 și executând operația inversă celei care a dat diferențele prime, secunde, terțe, putem obține, printr-un fel de integrare a valorilor întregi, suita de valori a funcției $y = f(x)$.

Aceste integrări și diferențieri în numere întregi i-au îngăduit lui Babbage să construiască o mașină care nu numai că aduna și înmulțea, prin sistemul simplu de cilindri cu angrenaje care permiteau trecerea de la unități la zeci, apoi la sute etc ... (sistem analog cu cel al contoarelor de la taxiuri), ci și producea, într-un mod mai subtil, șirurile de diferențe ale oricărei funcții cu coeficienți algebrici raționali, pentru valorile întregi ale variabilei și invers. Mașina lui Babbage, ireproșabilă ca principiu, era, din păcate, foarte stânjenitoare, opera cu încetineală și costa foarte mult; Parlamentul Britanic, după ce a aprobat o sumă preliminară destul de însemnată pentru a începe construirea unei părți a elementelor (construcție care a durat

vreo zece ani), a uitat cu totul de colonelul Babbage și mașina sa, ale cărei teorii despre cilindri dințați acoperiți de cifre negre se află și acum, învăluite în tristețe, în Muzeul Științelor din Londra. Însă imaginația lui Babbage nu se mărginise la mașina de calculat; în ciuda nepăsării guvernelor care au urmat și-a consacrat apoi viața, studiului unui proiect și mai ambițios, acela al unei mașini logice, o mașină care să poată raționa prin silogisme și care, hrănită cu premise, ar scoate concluziile. Aici Babbage a fost cu adevărat un precursor, căci pentru a introduce în mașină datele unei probleme logice sau matematice și a o pune în „mișcare dirijată", născocise un sistem de cartoane perforate, în găurile cărora se introduceau pârghii care făceau înregistrarea și operațiile; pozițiile reciproce și distanțele dintre găuri, care grupau pârghiile într-un mod determinat, comandau desfășurarea operațiilor care, după ce mașina era pusă în mișcare, scoteau concluzia sau rezultatul într-o constelație de găuri sau de puncte pe care nu-ți mai rămânea decât să le descifrezi. Din păcate, nici un mecena nu s-a interesat de colonel, Parlamentul n-a vrut să mai audă de el și nici de invențiile lui ciudate, iar mașina de raționat nu a fost niciodată construită.

Totuși, așa cum am spus mai înainte, concepția lui Babbage era corectă; ideea cartelelor sau a plăcilor perforate este aplicată în mod curent în zilele noastre, iar de cartoane sau de benzi perforate se folosesc nu numai mașinile de calculat, de diferențiat sau de integrat etc., care funcționează adesea în virtutea diferențelor prime ale lui Babbage, ci și mașinile logice, capabile să coordoneze rațional datele unei probleme matematice sau logice și să le rezolve.

„Supercreierul" de la Harvard (anglo-saxonii le mai zic acestor mașini „Creiere electronice" sau „roboți matematici"), de pildă, calculează cele mai complicate funcții trigonometrice și hiperbolice ca și funcțiile de funcții, integrează orice curbă, rezolvă ecuații algebrice simultane sau ecuații diferențiale, se folosește de logaritmi, rezolvă în 19 ore o problemă care ar cere o lună de lucru unui număr de patru experți ce muncesc împreună. Această mașină are 800 km de conductori, 3500 de relee cu 2225 de contacte, 1464 de comutatoare cu 10 poli și 72 de mașini subalterne adiționate; precizia rezultatelor este de ordinul a 23 de zecimale.

Înainte ca mașina să se pună în mișcare, „programatorul" inserează o bandă perforată după un cod care transformă în grupuri de

puncte simbolurile matematice sau logice necesare, elemente, date și operații conexe.

Să notăm că motoarele aservite auxiliare, numite pe marile nave servo-motoare, care, printr-o manetă pe un mic cadran transmit mașinilor sau cârmei un ordin precis, declanșează energia necesară executării și o determină, sunt în oarecare măsură precusori ai „roboților" moderni; ele transmit cu cheltuială infimă de energie nu numai indicația, ci și forța dirijată și controlată care face să se execute ordinul printr-un motor de mare putere.

Dintre „mașinile savante" de astăzi, să mai pomenin E.N.I.A.C-ul (Electronic Numerical Integrator and Calculator) de la Universitatea din Philadelphia. O mașină de acest fel permite să se rezolve rapid probleme mult mai complicate decât cele obișnuite de algebră și de analiză matematică; este excelentă în probleme de analiză combinatorie, poate enumera de pildă specificațiile celor 230 de rețele cristaline și rezolvă cu succes probleme de logică pură. „Maestrul programator", îmblânzitorul care îi transmite problemele și întrebările, îi poate ordona dinainte să examineze succesiv mai multe probleme diferite în care elementele uneia depind de rezultatele problemei anterioare sau (fapt care apropie și mai mult acest control întârziat de gândirea logică) să modifice în timpul rezolvării problemei instrucțiunile generale primite la început pentru a introduce un element nou, neașteptat sau necunoscut inițial; acest lucru pare să îi confere mașinii facultatea de a lua hotărâri de care doar ea este răspunzătoare.

Mașinile de calculat electronice sunt folosite pentru a satisface cererea sporită de mijloace de rezolvare rapidă a nenumăratelor probleme ridicate de cercetarea științifică și de industrie. În general, aceste mașini folosesc numerotația binară redusă la cele două numere 1 și 0, un impuls pentru 1, o pauză pentru 0. Impulsurile electrice sortite a fi „memorate" sunt convertite de niște lămpi în unde ultrasonice într-o coloană de mercur, circuit închis prin care trec până ce vor fi rechiziționate. Aceasta permite o „memorie" de 8.000 de elemente, care mai poate fi multiplicată de către un înregistrator cu bandă magnetică.

Este pe cale de a fi construită o mașină de jucat șah; la Expoziția centenară (1951) de la Londra am văzut funcționând o mașină de jucat dame, juca partide cu oameni din public care se înghesuiau în jurul ei (se pare că mașina pierdea la jucătorii buni, câștiga la cei mediocri, era de fapt de putere medie, nu făcea greșeli, dar era lipsită

de imaginație). După cum o arată și numele, „creierele electronice" moderne folosesc atât lămpi electronice (cu miile uneori, ceea ce le face să calculeze cu viteze amețitoare), cât și celule fotoelectrice; metoda care le îngăduie să aleagă între o soluție avantajoasă sau o mișcare favorabilă și o soluție sau o mișcare defavorabile este aceea a calculului probabilităților. Ele au în vedere mai multe soluții sau mișcări posibile și o aleg pe aceea ale cărei consecințe previzibile într-un spațiu de timp limitat implică cel mai mic risc. Acest gen de operație se apropie ciudat de mult de funcționarea creierului omului și al animalului; este un fel de organ de „pariu mutual", de totalizator de șanse; atât animalul, cât și jucătorul este deseori pus în situația de a alege între niște reacții care ajung fie la *outsider-ul* bine cotat, fie la favoritul mai puțin cotat.

Nu este de mirare că aceste mașini logice au fost studiate de savanți interesați nu numai de rezultatele lor practice, ci și de lumina pe care ar putea-o arunca asupra modului de funcționare a gândirii sau măcar a creierului omenesc. Ei au constatat că această metodă de a alege între probabilități diferite este mai apropiată de funcționarea circuitului nervos decât era mecanismul unei centrale telefonice, comparație mult îndrăgită de generația precedentă. De fapt, așa cum arată Norbert Wiener (*Cybernetics*, New York, John Willy and Sons), mașina ultrarapidă de calculat reprezintă probabil un model aproape ideal al felului în care se pun problemele legate de alegere și felul în care sunt tratate în sistemul creier-circuit nervos. Caracterul „totul sau nimic" (da sau nu) al descărcării de neuroni este analog cu disciplina „sensului unic" aferentă folosirii numerației binare (în baza 2), uzuală la cele mai perfecționate mașini de calulat.

Toate acestea ne duc, printr-un lung ocol, la număr și în mod deosebit la numărul doi ca bază a numerației binare[1].

Această corespondență între funcționarea neuronilor puși la lucru printr-o alegere sau o hotărâre a judecății și utilitatea folosirii notației binare la mașinile de calculat, excluzând oricare altă notație (datorată faptului că în amândouă cazurile alegerea este limitată la un „da sau nu", circuit deschis sau circuit închis), a fost remarcată de către toți psihologii care se ocupă de cibernetică și admitem acum că creierul omenesc se folosește intuitiv de numerația binară. Sau, pentru „teleologicieni" (sau, mai scurt, teleologi): „Natura, care a născocit înaintea omului mașinăriile cele mai diverse : clopote scufundătoare, giroscop, baterii electrice, ferăstraie, zăvoare, cornete

acustice, supape, undițe etc., a născocit și a aplicat numerația binară în funcționarea creierului omenesc".

Această constatare nu are doar un interes psihologic, ci și un uriaș interes practic, deoarece, așa cum s-a arătat, tot acest mecanism de alegere prin mașină poate fi redus la două stări ale circuitului electric sau mai degrabă electronic (incluzând lămpile catodice), circuit deschis sau circuit închis, corespunzând cifrelor 1 sau 0 din notația binară. Să notăm că mașinile de calcul folosesc, în afară de numerația binară, logica *bivalentă* clasică, aristotelică, care se adaptează și ea problemelor, căutând „soluții favorabile"; nu știm de ce ar fi în stare o mașină „de gândit" care folosește logicile trivalente sau polivalente ale lui Korzybski sau Reichenberg. Întrucât aceste mașini de calculat sau creiere electronice pot astăzi să înregistreze, asemeni unei memorii conștiente un stoc de rezultate matematice sau logice și la nevoie să apeleze la ele dacă dezvoltarea calculului sau a raționamentului o cere, aceste asemănări între funcționarea creierului omenesc și cea a mașinii au atras, după cum era și firesc, pe de o parte atenția psihologilor dornici să exploreze, datorită examinării anumitor analogii, straturile conștiente sau subconștiente ale psihismului omenesc, pe de alta pe aceea a filosofilor care căutau să perceapă dacă între om și mașina savantă există diferențe fundamentale sau dacă ar fi cu putință să construiești treptat mașini... aproape omenești. Aproape... vii.

Partizanii *Gestalttheorie*-i materialiste, aceea pentru care o „constelație" de elemente pur fizico-chimice poate, prin simplul fapt al structurii sale „favorabile", să se transforme din mozaic inert în entitate organizată, să dea semne de pseudoviață (viața este cu adevărat pentru această școală un epifenomen, un miraj care nu se deosebește prin nimic esențial de neviață, de materia neorganizată, cu excepția ciudatei calități de a produce iluzia transcendenței sale față de această materie neorganizată) sunt încântați să-i vadă pe inginerii cibernetici producând „constelații", mașini „aproape omenești" care par să le confirme teoria. De fapt, crearea „mașinilor savante" ar oferi mai degrabă un argument adversarilor vitaliști ai „Gestalttheorie-i"; dacă o constelație, un aranjament „favorabil", voit sau nu, ar avea ca aranjament, cea mai mică influență integrantă asupra elementelor sale, mașinile despre care este vorba ar trebui să manifeste calități de viață sau de inteligență care să le depășească pe acelea pe care constructorul le prevăzuse. O mașină de rațional în mod

silogistic ar produce dintr-o dată, într-un avânt sintetic, principiul inducției totale sau, mângâiată de o adiere lirică neașteptată, favorizată de starea electrică a atmosferei, o alta ar compune spontan un poem[2]. Adevărul este că există întotdeauna o diferență esențială între om și roboții construiți de om; tot ceea ce roboții oferă sau construiesc în ordinea inteligenței a fost pus în ei dinainte (precum conținutul distribuitoarelor automate despre care am mai vorbit), căci judecata lor are întotdeauna un caracter silogistic, rezultatul este conținut în datele problemei tot așa cum concluzia este conținută în premisele silogismului. [Și totuși, robotul care joacă șah sau dame pare, la prima vedere, că introduce ceva neprevăzut datorită căutării și selectării probabilităților favorabile. Oare și acestea sunt conținute toate aici în pozițiile inițiale ale pieselor? Da și nu[3].]

Să-l citățm pe un filosof care a studiat psihologia „mașinilor savante" (Prof. Jefferson în *Hibbert Journal*, octombrie 1949):

„Numai atunci când o mașină va putea compune un sonet sau un concert ca urmare a gândurilor și a emoțiilor formulate și resimțite de ea, și nu prin asocierea accidentală de simboluri, vom putea spune că mașina este echivalentă cu creierul, adică poate nu numai să scrie ceva coerent, ci și să *știe* că a scris. Putem desigur aduna „amintiri" matematice sau logice într-o mașină..., dar nici un mecanism nu poate *simți* plăcere atunci când are succes (cu toate că poate fi dresat să o arate în mod automat), neplăcere din pricina unei greșeli de calcul sau a unei lămpi care s-a ars, nu poate fi atins de lingușeală, nu poate fi atras sexual, nu se poate mânia." Trebuie totuși să amintim aici un fenomen, atât neașteptat pe cât de amuzant, aproape comic: dacă-i dăm unei mașini un ordin cu neputință de executat în condițiile logice ale funcționării sale, de pildă ordinul de a împărți o cantitate finită la zero, atunci mașina sau una dintre părțile sale poate exploda, siguranțele se pot arde, catastrofă care aduce în mod ciudat o criză de nervi, o extraordinară *nervous breakdown*. Aceste „crize de nervi", care îi înveselesc pe psihologi, dar nu și pe tehnicienii care se ocupă de întreținerea mașinilor savante, le apropie cel mai mult de om[4]. Deosebirea esențială pare a fi aceea că mașina constituie un șir de operații logice care nu se recunoaște ca șir (spre deosebire de conștiința umană care, chiar în ipoteza epifenomenului, *știe* că nu este un șir de reacții fizico-chimice, se cunoaște pe ea însăși ca fiind un șir: acesta este paradoxul lui Stuart Mill).

Să mai menționăm și alte cugetări în legătură cu domeniul roboților gânditori: într-o problemă logică delicată am putea consulta trei mașini diferite și am putea adopta, în caz de deosebire de păreri, pe cea a majorității. O mașină savantă (și citățm încă o dată din *Hibbert Journal*) ar putea citi un sonet și și-ar putea spune părerea despre ritmul și rimele acestuia, ar putea probabil chiar să scrie un „sonet combinatoriu" corect din aceste două puncte de vedere (dacă am introduce în ea cuvinte potrivite), ar putea, la rigoare, să scrie o proză corectă din punct de vedere sintactic, mai degrabă în genul *Finnegan's Wake*[5] decât în cel al „Memoriilor de dincolo de mormânt". Compunerea literară prin combinări întâmplătoare de cuvinte este înrudită cu „Minunea maimuțelor dactilografe", închipuită de Emile Borel: 10.000 de maimuțe, bătând la tot atâtea mașini de scris, un număr x de ani, ar compune textele tuturor cărților din Biblioteca Națională.

Este nostim să descoperim că Cicero (în *De Natura Deorum*) a fost precursorul lui Emile Borel, născocind o „minune a maimuțelor dactilografe" în stil antic. El îl face într-adevăr pe stoicul Balbus să rostească următoarele cuvinte:

„Cel care este încredințat că ordinea se poate ivi din haos la întâmplare poate tot așa de bine să creadă că dacă o cantitate foarte mare compusă din cele 21 de litere, făcute din aur sau din orice altă materie, ar fi aruncate pe jos, atunci ele ar cădea în așa fel încât ar alcătui *Analele* lui Ennius".

Întorcându-ne la maimuțele dactilografe, vedem că numărul x nu este infinit, ci se află undeva în regiunea „gogolcomplex".

Este de prisos să mai subliniem în ce măsură mașinile savante (sau „creierele electronice") pot fi folositoare în matematică și în logica simbolică; ele sunt folosite în cercetări foarte complicate de către departamentele civile, militare sau navale ale marilor puteri. În afară de descrierea lor tehnică, considerațiile psihologice și filosofice care pot fi trase din felul cum funcționează sugerează idei noi, oferă argumente și teme stimulatoare atât vitaliștilor, cât și adversarilor lor; să mai vedem câteva comentarii ingenioase în legătură cu ele:

Un sonet scris de o mașină savantă (hotărât lucru, ideea sonetului plutește în aer) s-ar bucura de apreciere mai degrabă din partea altei mașini decât din partea unui om. Ar putea oare o astfel de mașină, în loc să combine niște fraze, să producă toate combinările posibile ale unui anumit tip de diagrame stabilite pe o anumită temă, Secțiunea

de Aur de pildă, oferind pictorului sau arhitectului un sortiment interesant de modele?

Declarațiile „etice" ale unei mașini nu ar fi decât consecințele logice ale principiilor etice ce i-au fost oferite (de pildă, câteva aforisme de Confucius sau de Marc Aureliu).

Deosebirea dintre operațiile creierului și cele ale mașinii: facultatea de a judeca (de a se folosi de judecata pentru care logica este un instrument) este principalul organ al inteligenței, un organ cum este mâna, ochiul, stomacul, organe *folositoare* vieții. Creierul este sediul fizic al acestui organ, centrala telefonică (comparație clasică folosită deja)[6]. Însă situația este percepută de un alt element, cel psihic, care hotărăște dacă este cazul să acționeze sau să reflecteze, propune deciziile ce trebuie luate. Chiar și în centrala telefonică există un factor exterior, abonatul, care cere numărul, el fiind cel care animă, produce fenomenul, și nu domnișoara sau cadranul automat.

Mai este și „presiunea vitală" care te îmboldește să judeci, să alegi, care face parte din forța biologică; cu toate că are și sedii fizice sau mai degrabă fiziologice, ea posedă și o sursă psihică, extraspațială poate, asemănătoare cu aceea a câmpurilor vii organizatoare ale lui Raymond Ruyer („Elemente de psiho-biologie"), câmpurile electromagnetice ale corpului omenesc fiind reflectări consonante ale acestora în mașina logică impulsul care corespunde forței biologie este dat, în general, de o sursă sau de un circuit electric sau electronic, ca și în circuitul nervos uman de altfel, în care toate acțiunile și reacțiile nervilor au drept instrumente și canale (nu cauze) mici circuite electrolitice. Însă mașina nu are prin ea însăși dorința de a acționa, de a judeca, de a alege în interesul său sau din curiozitate; îi trebuie un agent exterior, „programatorul", care alege probleme și comandă, în general, tipul operațiilor.

Dintre mașinile care funcționează deja, mai pomenim „Calculatorul IBM" electronic, care „citește" instrucțiunile comunicate prin numere[7] sau prin benzi perforate, are o memorie „internă", care înmagazinează ordinea operațiilor și pune deoparte rezultatele, pentru a le folosi la momentul cerut, la problemele ce se pun în timpul dezvoltării matematice sau logice; mașina aceasta poate dispune de 400.000 de elemente de referință sau de calcul și imprimă în final rezultatele cu aproximația cerută.

Însă facultatea de a combina cifre, cuvinte sau simboluri nu a făcut să se nască și facultatea de a gândi independent de mecanica

silogistică. Căci într-adevăr nu cuvintele sau simbolurile, sau asocierea lor produc gândirea (teoria asociaționistă), ci gândirea a produs cuvintele, simbolurile și limbajul „urmând elanul, dorința naturii de a se recunoaște și de a se desăvârși în om, suprema ei creație" (Teoria lui Wilson). Totuși, simbolul sau cuvântul pot deveni ulterior creatori datorită facultății de a pătrunde în inconștient, în domeniul viselor și al miturilor, al „metaforelor intime" și de a scoate brusc la iveală analogii ascunse. Numai că aceste lucruri nu se aplică la mașini, lipsite încă de subconștient sau de inconștient; aceasta este una dintre deosebirile fundamentale între mașină și om.

Avioanele care se îndreaptă în mod automat către țintă, atrase de reflexia undelor electromagnetice (*radar*) sau de temperatura țintei, minele acustice, atrase de ultrasunetele reflectate (*sonar*), toate acestea intră în domeniul automatelor cu judecată aparentă. Am putut vedea la Expoziția de la Londra, din 1951, cele două „broaște țestoase electronice", *Elmer* și *Elsie*, care, datorită „ochilor" cu celule fotoelectrice, „văd" obstacolele, sunt respinse de lumină, atrase de căldură, se mișcă într-un spațiu restrâns fără să se lovească sau să se izbească de ziduri, ca niște animale cu deplină rațiune. După teoria *Gestalt* materialistă (există și o teorie *Gestalt* organicistă de disciplină mai degrabă spiritualistă, precum „holismul" mareșalului Smuts) nu există nici un motiv ca o mașină de acest gen să nu dezvolte o „conștiință epifenomen", să nu știe că este mașină sau ca *Elmer* și *Elsie*, broaștele țestoase electronice, să nu fie afectate deodată de un complex sexual și să acționeze în consecință. Să mai așteptăm.

Precursorii roboților de astăzi sunt automatele care au fost construite în număr mare după ce a fost inventat sistemul roților dințate și al regulatorului de bătăi, numit mecanism de ceasornic, dar abia în secolul al XVIII-lea automatele ajung la celebritate o dată cu Vaucanson: păpuși mari care dansează, cântă la pian, bat toba, vorbesc, scriu scrisori etc. Un automat care joacă șah îi este înfățișat țarinei Ecaterina cea Mare, însă în realitate are ascuns în el un pitic care mișcă piesele pe tablă.

Hoffmann și-o închipuie pe Olympia, încântătoarea femeie păpușă de care se îndrăgostește unul dintre eroii săi; ea dansează și cântă înaintea lui până când, după o ceartă între falsul tată și mecanicul care a construit minunea, este scoasă o piesă esențială, arcul motor se strică și Olympia se prăbușește fără viață, păpușă fără doar și poate, la picioarele adoratorului deznădăjduit. Cu povestea

Olympiei, autorul a făcut din automatul uman, sau mai curând feminin, mai mult decât un tip, un arhetip care se întâlnește peste secole cu mitul Galateei.

Știința și mecanica modernă au înzestrat, după cum era și firesc, automatele de acest fel cu facultăți noi; ele pot nu numai să fie dirijate prin unde hertziene sau să se miște singure precum *Elmer* și *Elsie*, ci și să se conformeze undelor sonore, răspunzând cu voce sintetic.

În legătură cu aceasta să menționăm un nou tip de dictafon, care permite să dictezi un text unei mașini care îl „bate" direct pe o foaie; textul este, firește, scris fonetic putând fi, de altfel, dictat în orice limbă.

Și totuși, problema: „Oare pot gândi mașinile?" îi frământă tot mai mult pe „ciberneticieni" și pe matematicienii anglo-saxoni, inginerii arătându-se oarecum optimiști, matematicienii și filosofii fiind de-a dreptul sceptici. Astfel, Turing a publicat (în revista *Mind*, octombrie 1950) un articol intitulat „Computing Machines and intteligence", iar W. Ways îi răspunde în revista *Philosophy* din aprilie 1952. Turing descrie o „mașină-copil", pe care își propune să o „educe" și care va ști:

1° Să gândească, să scrie, să joace jocuri *ad-hoc* și să-și aducă aminte.

2° Să ia decizii, potrivite sau nepotrivite.

3° Să se observe pe ea însăși.

4° Să se comporte într-un anume fel pentru a-și atinge țelul.

5° Să învețe prin recompense și pedepse.

6° Să se supună ordinelor.

7°Să facă dinadins greșeli în timp ce lucrează.

Pentru a verifica întrebarea „Oare pot gândi mașinile?", Turing nu ia drept model gândirea umană, ci un exercițiu, un „test" adaptat mașinii, a variantă a programului de radio „Douăzeci de întrebări", rolul celui care pune întrebările fiind luat de o ființă omenească. Turing însuși crede că o mașină în stare să susțină acest „test" nu există încă, dar că peste 50 de ani această problemă va fi rezolvată. El înlocuiește, așadar, întrebarea: „Oare pot gândi mașinile?" cu întrebarea: „Ne putem oare închipui o «mașină de calculat» electronică în stare să-și joace onorabil rolul în testul de mai sus?"

Turing răspunde afirmativ; dimpotrivă Ways, luând ca punct de plecare definiția unei mașini dată de dicționar, declară că o mașină este o îmbinare de părți mecanice sau electronice care nu are viață intimă psihologică, care nu este înclinată spre visare, care, la urma

urmei, nu are nici conștiința de a avea conștiință, nici inteligență, nici voință independentă. Dacă o mașină ar zice: „Mă dor măselele", sau „Îmi plac căpșunii cu frișcă", sau „Îl urăsc pe domnul X", noi am bănui că a fost inserat în ea un disc înregistrat. Refuzăm să îi atribuim mașinii vreun sentiment. (Dar oare nu putem dresa o mașină să spună cu sinceritate: „Lucrul acesta este plăcut, acestea este neplăcut"? Am pomenit cazul mașinii care se strică din cauza unei întrebări necuviincioase, al cărui echilibru armonios este rupt.)

Ways citează și conferința doctorului Jefferson (1949): „Vom putea spune că mașina are valoarea unui creier numai atunci când o mașină va putea să compună un sonet sau un concert pricinuit de gândurile și emoțiile simțite, iar nu prin combinarea întâmplătoare de simboluri".

Toate aceste argumente ridicate împotriva lui Turing se mărginesc, de fapt, la a face deosebirea între domeniul sentimentului și cel al calculului logic; se admite că o mașină poate într-adevăr rezolva probleme de logică pură, nu atât din voință sau curiozitate internă de altfel, întrucât mașina nu poate decât să înșiruie tautologii (aceasta fiind, de fapt, metoda silogistică), însă are nevoie de inteligența unui „programator" din afară pentru a pune problema și a interpreta rezultatul.

Întregul domeniu al inteligenței și al sentimentului îi scapă mașinii care nu poate, zice Ways, să fie serviabilă sau prietenoasă, să ia vreo inițiativă, să aibă simțul umorului, să imite prin mimetism conștient, să fie îndrăgostită, „să-i placă fragii cu frișcă".

Polemica aceasta nu este de prisos; nu știm, o admite și Ways, care va fi „inteligența" mașinilor logice peste 50 de ani, până atunci, observațiile și analizele acestea ne îngăduie să lămurim probleme reale de psihologie, chiar de fiziologie și de logică simbolică și obișnuită, care fac parte deseori din domeniul mai general al validității dogmelor pozitivismului empiric.

Dintre ipotezele nematerialiste despre originea vieții pe planeta noastră, panspermia lui Arrhenius, transpunând misterul inițial în spațiile siderale, presupune că de aici au ajuns cândva până la noi germeni vii, nespus de mici și nespus de rezistenți, care s-au încarnat în cele dintâi protozoare, strămoși ai tuturor speciilor vii; ne-am putea tot astfel închipui că în urma venirii unor noi germeni vii, unii dintre ei ar putea întâlni o mașină electronică, nouă și sinistră Galatee, și i-ar transmite scânteia vieții.

NOTE

[1] Numerația în baza 2 se supune acelorași legi ca numerația într-o bază oarecare, orice număr poate fi reprezentat aici prin $a \cdot 2^n + b \cdot 2^{n-1} + c \cdot 2^{n-2} + ... + 1 \cdot 2 + k$, a, b, c... l, k fiind mai mici decât 2, adică egale cu 0 sau cu 1.

Numărul 243, de exemplu, din notația noastră zecimală este aici $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1$ sau, în notație binară, se va scrie 11110011.

Cifrele 0, 1, 2 ... 9 din sistemul zecimal vor fi reprezentate de 1, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001.

[2] Voi nota aici, pentru ținere de minte, cealaltă explicație materialistă a vieții, este vorba de semimaterialismul sau hylozoismul lui Haeckel, după care orice atom de materie ar conține o bucățică infinitezimală de viață sub formă de „iritabilitate"; integrarea reală sau aparentă a acestor atomi de psihism ar produce, ca niște psiheuri colective iluzorii, „ființele pseudoconștiente" organizate. Dacă această teorie ar fi adevărată nu ar exista nici un motiv pentru ca psihismele infinit de mici dintr-un cristal, ba chiar dintr-o pietricică, să nu se integreze producând cristale pseudoconștiente. Tot așa stânci pseudogânditoare, munți iritabili.

[3] Norbert Wiener, deși imparțial, pare totuși că sugerează calitatea transcendentă a judecății vii comparată cu pseudopsihismul mașinii în fraza eliptică: „Informația este entropie negativă".

[4] Iar robotul care joacă dame este uneori, se pare, în stare să trișeze când vede că pierde.

[5] „Finnegan's Wake", numită mai întâi „Work in Progress", ultima carte a lui James Joyce, puzzle etimologic inspirat din Rabelais; el amestecă rădăcinile și asociațiile de idei, de nume proprii și comune, din vreo 15 limbi vechi și moderne.

[6] Să notăm că cele 3 straturi de celule care grupează și pun în ordine impulsurile din cortex și creează percepții sunt în esență asemănătoare cu anumite organe ale mașinilor electronice.

[7] Numerele sunt traduse de mașină în sistemul binar.

CAPITOLUL XV

DE LA NUMĂR LA ABSTRACȚIA PURĂ – TEORIA GRUPURILOR ȘI A INVARIANȚILOR – RELATIVITATE ȘI MECANICĂ CUANTICĂ ONDULATORIE – PRINCIPIUL MINIMEI ACȚIUNI

„Gândirea, luată în înțelesul său cel mai general, ca să poată cuprinde arta, filosofia, religia, știința, luate și ele în accepția cea mai generală, înseamnă căutarea invarianței într-o lume în necurmată schimbare."

(C.J. KEYSER)

Am pomenit de mai multe ori disciplina misterioasă care domină la ora actuală aproape toată matematica și pe care Oswald Spengler a numit-o: „concepția ultimă și finală a matematicii occidentale, amplificarea și spiritualizarea teoriei funcțiilor în teorie a grupurilor". Această teorie ridică teoria mulțimilor la un grad de abstracție superior; este o disciplină logică și matematică totodată care studiază și compară cicluri, grupuri de operații, de transformări luate în considerare independent de obiectele sau de mulțimile concrete sau fictive cărora li s-ar putea aplica.

După cum scria Henri Poincaré: „Teoria grupurilor înseamnă, ca să zicem așa, toată matematica, despuiată de materie și redusă la forma ei pură". Aproape tot cu acești termeni descria neopitagoricianul Nicomachos din Gerasa lumea reală necorporală a structurilor și a formelor ca fiind opuse lumii iluzorii a materiei.

Cea dintâi aplicare senzațională a teoriei a fost aceea în care doi tineri savanți de geniu au încercat să găsească rădăcinile unei ecuații de un grad mai mare de 4 cu ajutorul substituțiilor, operații care constau în a trece de la o permutare între n litere la o alta; substituțiile și permutările între rădăcinile posibile ale unei ecuații de gradul 5 li-au îngăduit lui Abel și lui Galois să dovedească, aproape în același timp, că această ecuație nu se poate rezolva prin radicali algebrici. Știm că Galois a fost ucis în duel la vârsta de 21 de ani; își petrecuse noaptea redactând memoriul despre descoperirea sa.

Dacă o substituție S permite trecerea de la o permutare P_1 la o permutare P_2, iar o altă substituție T permite trecerea de la permutarea P_2 la permutarea P_3, numim *produsul* dintre S și T substituția care permite trecerea directă de la P_1 la P_2. Toate substituțiile, în cazul rădăcinilor unei ecuații, fac parte dintr-un același *grup*. Dacă, în loc să raționăm despre substituții de litere, operăm deplasări de figuri, descoperim o relație asemănătoare între transformările lui F_1 în F_2, apoi ale lui F_2 în F_3, transformarea directă F_1F_3 făcând, de asemenea, parte dintr-un grup care cuprinde atât pe F_1F_2 cât și pe F_2F_3; grupurile de permutări și grupurile de transformări pot avea aceeași structură.

Importanța memoriului lui Galois nu a fost înțeleasă decât 14 ani după moartea sa (1846), importanță capitală nu numai în domeniul rezolvării ecuațiilor, ci și în cuprinzătoarea lume a matematicilor superioare. Galois întrevăzuse că una dintre proprietățile cele mai însemnate ale noțiunii de grup este izomorfismul, identitatea de structură a transformărilor aplicate în domenii diferite, de exemplu între substituțiile rădăcinilor unei ecuații de gradul 5 și cele 60 de rotații superpozabile ale unui icosaedru în jurul axei sale.

Noțiunea de grup se bazează în mare parte pe noțiunile de substituții, permutări, transformări și corespondențe de structuri. Aici se inserează teorema lui W. van Wyck (1856–1894):

Fiecare grup de ordin finit n poate fi reprezentat ca un grup de substituții de n litere. Avem, de exemplu, pentru trei litere a, b, c grupul:

abc acb bca bac cab cba.

Pentru a trece de la abc la acb înlocuim pe b cu c și pe c cu b, ceea ce se scrie (bc).

(abc) se citește a în b, b în c, c în a. Substituția (abc) aplicată aranjamentului abc dă un nou aranjament bca, care, aplicat la cab dă abc.

Dacă I este substituția identică,

abc	acb	bca	bac	cab	cba
I	(bc)	(abc)	(ab)	(acb)	(ac)

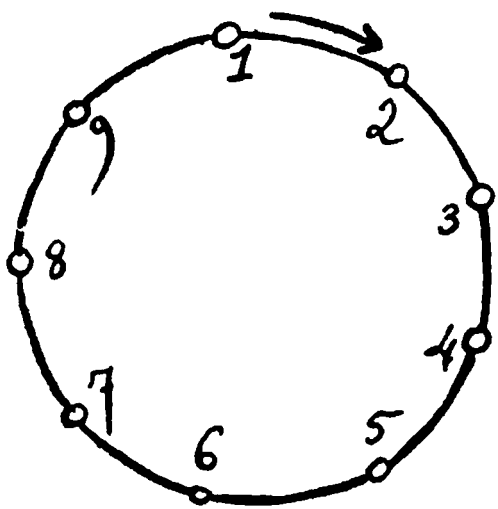
substituirea din rândul al doilea transformă expresia din primul rând în abc. Cele șase substituții alcătuiesc un grup.

Un grup de substituții echivalează cu un grup de permutări, de n! aranjamente posibile de n litere.

Noțiunea de invariant se înrudește aproape automat cu aceea de transformare: ceea ce rămâne invariant, număr, formulă, structură, într-un sistem de transformări sau de operații din interiorul unui grup. Simbolismul teoriei grupurilor este simplu și logic. Operația sau transformarea T care, după ce o primă operație S a înlocuit pe A_1 cu A_2, produce din nou obiectul sau mulțimea inițială A_1, va fi simbolizată prin S^{-1}. În acest caz, „produsul" T S devine $S^{-1}S = 1$. Transformare *identică*.

O mulțime de transformări aparține unui grup dacă inversul oricărei operații asupra mulțimii aparține mulțimii și dacă se întâmplă același lucru cu produsul dintre două operații oarecare ale mulțimii, mulțimea translațiilor în geometria euclidiană de pildă, sau mulțimea rotațiilor în jurul unui punct (aceste operații lasă *invanriantă* distanța dintre două puncte).

În algebră, mulțimea transformărilor aplicate numerelor întregi, pozitive, nule sau negative, care constau în a adăuga fiecărui număr întreg x un același număr întreg a formează un grup.



A face trei salturi pe cadranul figurii de mai sus este reprezentat de P_3. Avem tot timpul $P_m P_n = P_l$ (numărul obținut este totdeauna pe cadran), iar mulțimea acestor operații constituie un grup. Este, de altfel, izomorf cu grupul salturilor electronilor pe orbite în interiorul atomului.

Cele n! permutări ale unui număr n de obiecte constituie un grup. Dimpotrivă, la mișcările calului pe tabla de șah avem întotdeauna $P_m P_n = / = P_l$ (diferit de orice transformare directă), cu excepția cazului în care m, n, l nu sunt egale cu 0.

Prin această tehnică descoperim structura unui corp de operații, modul în care se înlănțuie operațiile, revelația izomorfismelor și a invarianților.

Dacă luăm o mulțime de p elemente, toate diferite, atunci diferitele moduri de a umple b cutii, punând câte un element în fiecare cutie vor fi: p (p–1) (p–2) (p–3)... (p–b + 1).

Teoria transformărilor care lasă invariante figurile plane sau solide (în mod deosebit distanța dintre două puncte oarecare) ne furnizează întreaga geometrie euclidiană; alte grupuri de transformări, după cum a arătat H. Poincaré, pot și ele să producă geometriile proiectivă, analagmatică, afină, *analysis situs* sau topologie și se aplică, de asemenea, geometriilor cu un număr oarecare de dimensiuni[1]. De asemenea, după cum a arătat Einstein, prin examinarea grupului de transformări care într-o mulțime de patru dimensiuni satisface principiul acțiunii staționare, lăsând invariantă o anumită funcție – forma cvadratică fundamentală, generalizare a distanței – teoria grupurilor îngăduie să se găsească legile gravitației, având drept cazuri particulare mecanica și dinamica clasice. Și, în acest urcuș către abstracție, granițele deja estompate dintre matematica pură, fizică, logică și teoria cunoașterii se șterg treptat până dispar. Noțiunea de invarianță plutește acolo sus, strâns legată în mod paradoxal de noțiunea opusă de relativitate; după fiecare etapă noțiunea relativului ne împinge tot mereu la cucerirea Absolutului. Chiar noțiunea de invariant decurge firesc din aceea de structură identică sau permanentă, pusă deja în evidență de Nicomachos din Gerasa; este, totodată, o prelungire în spațiu și timp a principiului identității; am văzut că în geometrie grupul este deseori definit printr-o proprietate de invarianță.

Cu toate că noțiunile introduse de teoria grupurilor par simple, simplitatea aceasta este mai degrabă înșelătoare, iar teoria acoperă un câmp atât de vast, încât un savant și-ar putea petrece viața explorând

doar unul dintre numeroasele ei domenii. Avem într-adevăr grupurile discontinui, finite sau infinite, grupurile continui, de asemenea finite sau infinite, grupul lui Lie (Sophus Lie, unul dintre pionierii teoriei grupurilor), grupuri cu reprezentare lineară, grupuri abeliene, nonabeliene etc.

Câteva aplicații ale teoriei grupurilor la mecanica cuantică:

Orice schimb între doi electroni, orice permutare de electroni lasă o configurație infraatomică invariantă. Sau:

Configurațiile posibile ale electronilor în jurul nucleului sunt invariante pentru toate permutările de electroni (acest lucru este important și pentru teoria spectrelor).

Calculul tensorial, instrumentul care i-a permis lui Einstein să pună în ecuații relativitatea generală, este și el un produs al teoriei invarianței și al teoriei grupurilor. Un tensor reprezintă o relație fizică independentă de alegerea coordonatelor. H. Rougier, de pildă, a aplicat teoria grupurilor, folosindu-se doar de conceptul de tensor, la noțiunea de simetrie abstractă introdusă de Curie, iar Einstein, datorită tensorilor, a putut să reprezinte legile naturii astfel încât să le facă independente de orice sistem de axe de referință. Pentru a-și construi ecuația fundamentală, el s-a folosit de cea mai generală lege dintre „legile naturii", aceea care guvernează evoluția oricărui sistem fizico-chimic închis, chiar și a universului (la scară cosmică putem face abstracție de noțiunea vieții), principiul minimei acțiuni. Nu trebuie să-mi cer iertare pentru faptul că prezint aici acest principiu care, deși se exprimă prin simboluri mai degrabă algebrice decât numerice (iar în cazul relativității generale prin simboluri tensoriale), este manifestarea cea mai imperioasă a Legii Numărului, lege întrevăzută de Pythagoras. Este interesant să notăm că Leonardo da Vinci a fost cel dintâi care a formulat acest principiu (legându-l de principiul cauzalității) în următoarea frază din „Caietele" sale:

„Natura nu-și încalcă niciodată propria lege ... O ! necesitate inexorabilă! Tu silești toate efectele să fie rezultatele nemijlocite ale cauzei lor, iar printr-o lege supremă și irevocabilă fiecare acțiune naturală ți se supune prin cea mai scurtă evoluție".

Enunțul obișnuit al principiului acțiunii spune simplu că atunci când un sistem închis (asupra căruia nu acționează nici o forță exterioară) trece de la o stare la alta, această schimbare are loc cu cea mai mare economie de efort cu putință (efortul adevărat, cel care sporește

energia potențială) fără să se teamă însă să risipească lucrul mecanic potențial deja acumulat, producerea de energie degradată sau entropie (vedem de pe acum că principiul minimei acțiuni, este în realitate o formă a principiului lui Carnot, fapt care este numit uneori principiul efortului minim și este chiar confundat cu principiul *hedonistic*).

Pentru a enunța corect principiul trebuie, de altfel, să introducem *acțiunea*.

Acțiunea unui sistem într-un interval t_1–t_0 este dublul, produs în intervalul de timp, al valorii medii a energiei cinetice în timpul intervalului.

Dacă E_a este forța vie sau energia cinetică, actuală, a sistemului,

acțiunea va fi $A = 2\int_{t_0}^{t_1} E_a \cdot dt$ cu $E_a = \frac{1}{2}\sum mv^2$.

Acțiunea are dimensiunile unei energii înmulțite cu un timp, ML^2T^{-1} (vom vedea că acestea sunt dimensiunile cuantei lui Planck, care este și ea o „cuantă de acțiune").

Să formulăm acum enunțul clasic al principiului nostru:

„Dacă suma energiilor potențiale și cinetice dintr-un sistem este constantă în toate configurațiile sistemului (sistem „închis"), dintre toate traiectoriile posibile pe care le pot urma elementele sale pentru a trece fără frecare de la o configurație la alta, traiectoriile efectiv adoptate vor fi cele pentru care acțiunea este minimă".

Un alt enunț este mai simplu: „Atunci când energia totală a unui sistem (energia potențială plus energia cinetică) este constantă, suma produselor maselor, vitezelor și spațiilor parcurse este minimă". Altfel spus: Acțiunea $A = \sum m \int v ds$ este un minimum, iar derivata acestei cantități va fi prin urmare nulă.

$$\frac{d}{ds} A = 0,$$

$$\text{sau } \frac{d}{ds} \sum m \int v \cdot ds = 0.$$

Aceasta rezultă din definirea acțiunii fie ca dublul integralei în timp a energiei cinetice $\int_{t_0}^{t_1} \sum m v^2$, fie ca integrala în spațiu (pentru fiecare particulă) a impulsului său $m \int_{s_0}^{s_1} v \, ds$.

Dacă numim potențial cinetic diferența dintre energia potențială și energia cinetică sau actuală a unui sistem ($E_k = E_p - E_a$), t_0 și t_1 timpurile la începutul și la sfârșitul transformării, avem:

$$A \text{ (acțiunea)} = 2 \int_{t_0}^{t_1} E_k \cdot dt,$$

iar principiul minimei acțiuni (numit sub această formă principiul lui Hamilton) devine $\delta_A = \delta \int_{t_0}^{t_1} E_k \cdot dt = 0$ (este enunțat uneori spunându-se că *valoarea medie a potențialului cinetic* între t_0 și t_1 trebuie să fie un minimum, prin urmare derivata sa este nulă).

Întrucât suma Ea + Ep este din ipoteză constantă (este vorba de un sistem închis), potențialul cinetic $E_p - E_a$ și energia cinetică nu diferă decât prin această constantă.

După Leonardo, principiul minimei acțiuni a mai fost enunțat de către Fermat într-un caz particular, referitor la drumul cel mai scurt pentru traiectoria unei raze de lumină, apoi de Leibniz (în 1682) ca „unul dintre principiile arhitectonice folosite de Inteligența Divină" și, în sfârșit, Maupertuis, în secolul al XVIII-lea, îl enunță corect drept legea cea mai generală care operează în Univers. În legătură cu entuziasmul arătat atunci de Maupertuis, Voltaire l-a ponegrit pe nedrept și s-a certat cu Frederic al II-lea, care îl numise pe Maupertuis președinte al Academiei din Berlin. Dar, după cum s-a putut vedea în secolul al XIX-lea, principiul mai are și multe alte forme în afară de forma mecanică clasică, de pildă cea de-a doua lege a termodinamicii (Legea lui Carnot-Clausius), ca principiu al creșterii entropiei (energie degradată cu consecința ei „nivelarea entropică").

Principiul lui Carnot (enunțat de Clausius) afirmă că este cu neputință ca o mașină autonomă, asupra căreia nu acționează nici o forță exterioară, să realizeze trecerea căldurii de la un corp la alt corp care are o temperatură mai ridicată decât a lui; sau: căldura nu poate circula singură, adică fără compensare de la un corp mai rece la unul mai cald.

Enunțul lordului Kelvin sună astfel:

„Este cu neputință să obții, cu ajutorul unui sistem material neînsuflețit, un efect mecanic de la o parte de materie prin răcirea acesteia sub temperatura celui mai rece dintre obiectele din jur".

Kelvin pare a fi cel dintâi care a remarcat proprietatea principiului minimei acțiuni de a oferi un criteriu care să deosebească

materia organizată de sistemele anorganice. Unii atribuie totuși această descoperire lui Helmholtz; însemnătatea ei este recunoscută abia în zilele noastre. Am aflat de la Gustave Le Bon că H. Poincaré observase că materia vie nu se supune întotdeauna acestei legi care conduce toate sistemele neînsuflețite.

Un alt enunț, pur termodinamic, al principiului lui Carnot spune: „Orice mașină termică ce produce lucru mecanic datorită căldurii care i se furnizează, nu poate transforma în lucru mecanic decât o parte din această căldură: proporția depinde de excesul de temperatură la care este furnizată căldura față de temperatura reziduului eliminat de căldura neconvertită în lucru mecanic."

Căldura produce lucru mecanic „căzând" de la un nivel mai ridicat la un nivel mai scăzut de temperatură (asemenea căderilor de potențial sau, în hidraulică, diferențelor de nivel); trebuie să avem un „corp rece" la nivelul de jos.

Principiul nostru are forme mai accesibile, mai ușor de perceput și de formulat. De pildă, în mecanica rațională, principiul lui Dirichlet: pentru ca echilibrul unui sistem închis să fie stabilit trebuie ca energia lui potențială să treacă printr-un minimum (care corespunde, de obicei, poziției celei mai de jos a centrului de gravitate).

Principiul Thomson-Berthelot: când avem mai multe corpuri și sunt posibile multiple reacții chimice, va avea loc în mod obișnuit acea reacție care corespunde celei mai mari căderi de „grad" energetic, celei mai mari cantități de căldură emise (exotermie; nu se produce lucru mecanic rezistent, ci, ca mai înainte, se cheltuiește gratuit, se face „risipă").

Principiul lui Curie: „Pentru ca un fenomen să se poată produce într-un mediu oarecare, este necesar ca anumite elemente de simetrie să nu existe în acest mediu. Asimetria este cauza fenomenului"; într-un mediu complet izotrop și omogen, nu există nici o „rațiune suficientă" pentru a se produce o schimbare.

Legea lui Boltzmann: Universul trece în mod constant de la stările cele mai puțin probabile la stările cele mai probabile.

Este o variantă a principiului minimei acțiuni intitulată „Principiul lui Hamilton", reformulată de către Einstein, Weyl, Eddington, ca „principiul acțiunii staționare" pe care Einstein a introdus-o în teoria relativității sub următoarele forme[2]:

1° Mișcarea unui punct material liber din Univers este determinată de „legea acțiunii staționare" $\delta \int d_s = 0$, în care elementul d_s

de pe o linie de univers este definit în fiecare punct de observatori în „cădere liberă", situați în „lumea euclidiană" tangentă în acest punct. Linia de univers a acestui punct material va fi prin urmare o *geodezică* trasată în multiplicitatea cu 4 dimensiuni ce alcătuiește mulțimea evenimentelor în univers. Geodezica între 2 puncte, dată de acel interval $\int d_s$ pentru care $\delta \int d_s = 0$, corespunde în spațiul cu 4 sau cu n dimensiuni liniei drepte în plan, cercului pe sferă. Câmpul de gravitație a devenit doar o manifestare fizică a curburii spațiului. Putem spune că în spațiul nostru traiectoria unei mase (un corp sau un punct având o masă oarecare) se deplasează de la o regiune cu o curbură mică către o regiune cu o curbură accentuată.

2° Forma mai generală. Toate legile mecanicii pot fi reunite într-un principiu general al acțiunii staționare $\delta_A = 0$.

Acest lucru pare limpede, dar se complică puțin pe măsură ce încercăm să dăm la iveală simbolurile aride ale calculului tensorial.

Acțiunea este $A = \int G \cdot \sqrt{-g} \cdot d_v$ în care d_v, diferențiala coordonatei generalizate, reprezintă elementul de hipervolum, de „capacitate" cu 4 dimensiuni, $dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \cdot dx_4$ (integrala este o integrală cvadruplă); g este determinantul complet g_{11}–g_{44}, G este invariantul care reprezintă curbura generalizată a lui Gauss[3]. $G \cdot \sqrt{-g}$ în spațiul cu 4 dimensiuni corespunde unei densități. În spațiul cu 3 dimensiuni, densitatea înmulțită cu volumul dădea masa; în spațiul cu 4 dimensiuni densitatea înmulțită cu „capacitatea" dă acțiunea. Deoarece $\sqrt{-g}$ este un invariant, acțiunea este proporțională cu G, curbura universului fizic. Notația principiului acțiunii staționare în calculul tensorial este de o simplitate biblică, $G_{\mu\nu} = 0$; simplitate care se arată înșelătoare când o aprofundezi[4]. Știm că Einstein și-a generalizat Relativitatea Generală extinzând-o de la gravitație la câmpurile electromagnetice și termodinamice, făcând din ea o „teorie unitară a câmpurilor", menținând și aici ideea că legile Naturii rămân *invariante* în orice sistem de referință.

Tot de acest principiu al acțiunii staționare sau al minimei acțiuni s-a folosit Louis de Broglie pentru a întemeia mecanica ondulatorie.

Se pare, așadar, că avem de-a face cu ceea ce am putea numi „Legea fundamentală a universului fizic", care dirijează evoluția oricărui sistem anorganic închis, adevărata „Lege a Numărului" prevăzută de Pythagoras, deși numărul nu apare aici decât acoperit de simboluri.

Cuvântul *anorganic* din fraza precedentă nu este lipsit de însemnătate; după cum presimțiseră Kelvin (poate că și Helmholtz) și Poincaré, viața, organismele vii nu se supun principiului minimei acțiuni.

Există și alte legi fizice importante reunite în formule care par nevinovate. Einstein a arătat că masa unui corp în mișcare, departe de a fi o caracteristică permanentă, crește o dată cu viteza, iar dimensiunile (inclusiv timpul) dimpotrivă, se contractă în direcția mișcării. Ele s-ar reduce la jumătate dacă viteza ar atinge 90% din viteza luminii, la 0 dacă viteza ar fi egală cu cea a luminii, masa devenind în acest caz infinită. Viteza luminii apare chiar și în rigurosul enunț al principiului mecanic al cauzalității.

Este posibil să se prevadă condițiile fizice în oricare punct P din Univers, într-un moment t, dacă cunoaștem condițiile fizice într-un moment precedent t_0 în orice punct din spațiu a cărui distanță până la P este mai mică decât c $(t-t_0)$.

La scară galactică sau chiar planetară , viața nu are o influență perceptibilă asupra acestor condiții. Dimpotrivă, la scara globului terestru biosfera are influență și strică ecuațiile.

Dacă M este masa unui corp cu viteza v, m masa sa în stare de repaus, c viteza luminii (în jur de 300.000 km pe secundă) atunci

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dacă viteza unui corp material ar fi $\frac{1}{2}c$, masa lui s-ar mări cu $\frac{1}{7}$, $M = \frac{8}{7}m$. Dacă v ar fi 99% din c, masa ar deveni $M = 7m$[5].

Dar cea mai importantă ecuație formulată de Einstein când a arătat că masa și energia sunt interschimbabile, se pot transforma una în alta, este teribila $E = mc^2$, ecuația căreia i se spune „a bombei atomice" și care spune că energia potențială a unui corp cu masa m (în stare de repaus) este egală cu produsul dintre masa și pătratul vitezei luminii (termenul c^2 dovedește uluitoarea cantitate de energie conținută până și într-un gram de materie). Acestă prezicere neverosimilă în aparență, triumf macabru al matematicii, cumplită amenințare pentru viitor a fost, după cum știm, parafată la Hiroshima[6].

Să aruncăm o privire timidă asupra tainelor mecanicii ondulatorii, devenită mecanica cuantică ondulatorie pentru a spicui câteva „legi ale numărului" din lumea infraatomică.

Și aici *acțiunea* apare ca un factor deosebit de însemnat în transformările energetice ale sistemelor fizice electronice sau chiar numai luminoase.

Cuanta h a lui Planck este elementul discontinuu constant, modulul sau standardul care măsoară aceste transformări, fie singur, fie înmulțit cu un număr întreg și care apare în orice oscilație cu emisii sau absorbție de energie electronică. La fiecare emisie de energie avem:

$\frac{E}{f} = h = 6{,}55 \times 10^{-27}$ ergi pe secundă,

E — energia emisă

f — frecvența oscilației (pe secundă)

h — constanta lui Planck.

Această constantă are dimensiunile unei acțiuni (ML^2T^{-1}).

Energia produsă prin lovirea unui electron de un foton are, invariabil, valoarea unei cuante.

Pentru foton (undă luminoasă care se comportă uneori ca o particulă):

Cantitatea de mișcare × lungimea de undă = h

Energia × perioada de oscilație = h

c (viteza luminii) × perioada de oscilație = lungimea de undă = l

Cantitatea de mișcare $p = h \times f^l$

f^l frecvența de oscilație a luminii

$f^l = \frac{c}{\lambda}$ $\quad p = \frac{h}{\lambda}$

Știm că, în conformitate cu principiul de incertitudine al lui Heisenberg, poziția unui electron și cantitatea sa de mișcare (sau viteza v) nu pot fi determinate în același timp; nu putem determina decât valoarea unui singur element dintre cele două.

Poziția unui electron poate fi determinată, de exemplu, cu o aproximație de 0,001 mm și, simultan, viteza sa cu o aproximație de 1 km/s, sau 0,0001 mm și 10 km/s, sau 0,00001 mm și 100 km/s etc.

Putem prezice poziția unei mase de 1 mg cu o aproximație de 1/5000 dintr-un milimetru; dar atunci când viteza unui electron este cunoscută, incertitudinea în legătură cu poziția sa este de 10^{-8} cm, adică de același ordin cu dimensiunea totală a atomului.

Această ceață de incertitudine și faptul că electronii și fotonii (particule de lumină) se comportă în același timp, sau mai degrabă alternativ, ca niște particule sau ca niște unde, au făcut să se nască teoria „undelor asociate" acestor două tipuri de particule. Intrăm aici într-un domeniu cvasiabstract, în care spațiul fizic al observatorului și un alt spațiu, psihic sau mental, se ating în mod misterios. Căci spațiul străbătut de unde conform teoriei ondulatorii a luminii, spațiul undelor asociate este un spațiu „conceptual"; undele acestea sunt „unde de cunoaștere" și reprezintă niște probabilități, nu sunt electromagnetice, însă frecvențele și lungimile lor se pot calcula. De exemplu, undele luminoase emise de un atom au o frecvență caracteristică; este frecvența „pulsațiilor" formate de două trenuri de unde asociate, unde abstracte, unde de probabilitate, dar ale căror pulsații sunt concrete, aparțin lumii fizice. Aceste unde sunt „undele ψ" sau funcția ψ în legătură cu care un savant englez a scris:

„Acest misterios ψ, identificat cu o probabilitate, se pare că a luat locul eterului, ca subiect al verbului «a ondula»".

Dacă M este masa unui „corporundal" (particulă și undă asociată), E energia lui, și dacă mișcarea lui liberă se efectuează de-a lungul axei x, avem pentru „funcția ψ" ecuația următoare

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 M}{h^2} \times E \times \psi = 0,$$

h fiind constanta lui Planck.

$(\psi)^2$ măsoară în acest caz probabilitatea de a găsi corpusculul între x și x + dx.

Întrucât am pomenit eterul, renegat și luat în râs de știința anului 1920, să notăm că ne putem aștepta oricând să vedem apărând un comunicat în genul „Eterul n-a murit"; Poul Dirac, unul dintre magicienii mecanicii cuantice ondulatorii, care a cheltuit multă inteligență pentru a stabili analogia simetrică a perechilor

$$\begin{cases}\text{electroni}\\ \text{unde asociate}\end{cases} \qquad \begin{cases}\text{fotoni}\\ \text{unde luminoase}\end{cases}$$

a scos, se pare, din ascunzătoare eterul lui Maxwell și o să-l pună la mare cinste într-un costum ușor retușat.

„Legile Naturii" (pe lângă principiul minimei acțiuni care este mai degrabă o hotărâre administrativă decât o lege în înțelesul cel mai înalt al cuvântului) sunt acum legile propagării acestor unde sau

bancuri de ceață, ecuațiile abstracte ale mecanicii cuantice ondulatorii; această ceață cvasimentală a devenit, de fapt, „substanța" Universului[7].

Fizicienii englezi numesc fotonii, electronii, protonii: *corporundals*, corpuri-unde, pentru a arăta că au un dublu aspect. Fizica matematică de astăzi ne oferă prin urmare, în ultima analiză, o lume exterioară alcătuită din entități (*corporundals*) care nu au o existență permanentă, nici mai multă formă decât substanță sau poziție, și.care nu se pot închipui, concepe, altfel decât prin formulele unei matematici hieratice.

Ca imagine abstractă sau simbol al acestor entități, sau mai degrabă al probabilităților care le înconjoară asemenea unui roi care vibrează, Heisenberg a introdus un tabel de numere cu două intrări care (ca să-l citățm pe Louis de Broglie) „pulverizează într-o oarecare măsură șirurile clasice ale lui Fourier într-o infinitate de elemente discrete, mulțimea lor reprezentând mărimea avută în vedere". Tabelul acesta, imagine a funcției ψ, dă o măsură a probabilității de a găsi electronul în anumite regiuni.

Să îndreptăm un proiector asupra lumii tulburi și scânteietoare a undelor asociate, lumea ψ care a luat locul lumii de repaus a lui Laplace și Lavoisier. Pătratul funcției ψ a lui Heisenberg-Schrödinger, pentru o mulțime de particule, reprezintă probabilitatea de a găsi aceste particule în poziții date, sau cu viteze sau energii date. Unda asociată electronilor are o lungime de undă de ordinul celei a razelor x (1/10.000.000 dintr-un mm) dar, o spun din nou, nu este electromagnetică. Vibrațiile subeterului ale cărui corpuscule cu unde asociate sunt vârtejuri par să aibă o frecvență de un milion de ori mai mare decât cea a luminii; lungimea lor de undă este dată de

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

m — masa corpusculului asociat undei

v — viteza corpusculului asociat undei.

Relațiile dintre electron-undă — asociată și foton — undă luminoasă depășesc o vagă similitudine: se știe astăzi că un foton se poate transforma în corpuscul, că o energie radiantă poate da naștere unei perechi de electroni de semn contrar, furnizând mai întâi contribuția de energie $E = 2\ mc^2$, necesară apariției maselor, apoi energia cinetică, pe care electronii o vor putea avea la început.

Ecuația $E = hf$ se poate scrie și $\frac{E}{f} = h = p\lambda$, în care p este cantitatea de mișcare mv; numai că aici perechea E, p se referă la o imagine ondulatorie.

Am văzut că h este egal cu $6{,}55 \times 10^{-27}$ ergi-secundă.

Să mai adăugăm acestui noian de paradoxuri faptul că, deși se admite că aceste unde nu sunt decât niște reprezentări simbolice ale anumitor probabilități și nu fenomene fizice în vechiul înțeles al cuvântului, ele pot fi *fotografiate*.

Dacă în formulele cuantice vom face ca valoarea lui h să tindă către 0, atunci vom regăsi formulele clasice precuantice. Să mai spunem că nu numai electronul și fotonul, ci și toate corpusculele pseudomateriei: pozitroni, protoni, neutroni, mezoni, cu sarcină sau neutri, neutrini, sunt asociați cu niște „funcții de undă" de tipul ψ.

Putem spune (și Louis de Broglie a adus confirmarea) că principiul incertitudinii sau al nedeterminării implică principiul cauzalității și determinismul fizico-chimic la scară infraatomică. O altă deformare aparentă a principiului cauzalității este aceea că dintr-o bucată dată de radiu este cu neputință, chiar în teorie, să prezici care dintre atomii de radiu se va dezintegra la un moment dat. Tot ce știm este faptul că, statistic, o proporție exactă de atomi din bucată va fi transformată în radiații în cursul unui an, o parte egală cu $4{,}1 \times 10^{-4}$ (durata medie de „viață" a unui atom de radiu este de 2440 de ani).

Putem trece direct de la infinitul mic la infinitul mare observând una dintre cele mai frumoase jonglerii matematice executate vreodată, aceea prin care Eddington, folosind firesc teoria grupurilor, a calculat în câteva rânduri și într-o jumătate de duzină de ecuații simple în aparență numărul N de electroni din univers (egal cu numărul de protoni). Dacă R_s este raza de curbură a spațiului vid, m masa unui electron, e sarcina sa, atunci avem $\frac{R_s}{\sqrt{N}} = \frac{e^2}{mc^2}$ (c reprezintă totdeauna viteza luminii)

sau: $\frac{hc}{2\pi e^2} \cdot m = \frac{\sqrt{N}}{R_s}$.

$\frac{hc}{2\pi e^2}$ este 137, „constanta structurii fine".

R_s este considerat aici ca 500 megaparseci sau $1{,}54 \times 10^{27}$ cm. Atunci N, numărul electronilor din univers, va fi 10^{79}.

Această șmecherie, coerentă de altfel, este pentru profan la fel de neobișnuită, la fel de surprinzătoare ca aceea a fachirului hindus numită *the Indian rope–trick* („șmecheria" cu frânghia: un fachir aruncă în sus o frânghie pe care se cațără un băiat care dispare, sub ochii halucinați ai spectatorilor).

Dar numărul N (puțin mai mic decât 2^{256} în care $256 = 2^8$) și valorile celorlalte constante cosmice găsite de Eddington în acest calcul abstract (cum sunt „constanta de structură fină $\frac{hc}{2\pi e^2} = 137$, constanta G a gravitației $= 6{,}66 \times 10^{-8}$, constanta cosmică $\lambda = \frac{3}{R_s^2}$) coincid cu valorile calculate prin alte procedee sau prin observații fizice directe.

Să punem alături de îndrăznețul calcul al lui Eddington pe cel prin care Arhimede, în scrisoarea către regele Gelon, numită „Numărul firelor de nisip", calculează numărul „arenar" de fire de nisip din Univers; 10^{63}; rezultatele lui Eddington și ale lui Arhimede sunt din același ordin de mărime. 2×10^{79}, numărul total, electroni plus protoni, de particule din Univers după calculele lui Eddington, are 80 de cifre (9^{99} are 309693 cifre).

Hartmann face un calcul asemănător plecând de la teoria lui Cebâșev despre numerele prime:

$$P_x = \frac{ax}{\log_e x}.$$

(P_x este numărul numerelor prime $\leq$ cu x, $a = 0{,}964889$) și de la volumul Universului V (volumul „suprafeței" hipersferei cu 4 dimensiuni), și găsește că $N = 0{,}96489\frac{V}{\log_e V}$. Întrucât după el log V este egal cu $13{,}7^2$, calculează că $N = 96489\frac{V}{137^2}$ (unde apare constanta de structură fină 137). În dezvoltarea acestor calcule apar și alte coincidențe demne de luat în seamă.

$$13{,}7^2 = \frac{1846{,}61 \times 980{,}665 \times 2{,}99796 \times 10^{10}}{6{,}06436 \times 10^{23} \times 4{,}79 \times 10^{-10}}$$

și $\frac{137^2}{1846,61} = \frac{980,665\ V}{N}$ cu $N = 1,5747 \times 10^{79}$

și $2N = 136 \times 2^{256}$.

Verificând aceste cifre constatăm că 1846,61 este apropiat de raportul $\frac{\text{masă proton}}{\text{masă electron}}$, 980,665 este accelerația gravitațională, g, $2,99746 \times 10^{10}$ este viteza luminii, $6,06436 \times 10^{23}$ este numărul lui Avogadro.

Hartmann crede că aceste coincidențe nu pot fi efectul întâmplării și deduce de aici că împărțirea materiei în Univers este identică cu aceea a numerelor prime, X este pentru P_x ceea ce este V pentru N.

Să lăsăm această orgie de cifre pentru a ne întoarce la principiul minimei acțiuni, „Lege a Numărului" prin excelență, și la semnificațiile sale metafizice, ca principii care guvernează evoluția oricărui sistem *anorganic*. Îndată ce un sistem conține Viață, materie vie, acest principiu nu se mai aplică cu rigurozitate, entropia sau energia degradată în loc să crească se poate micșora, pot fi create rezerve de energie potențială, de lucru mecanic rezistent.

În fotosinteza plantelor, de pildă, acestea pot crea rezerve de zahăr și de amidon folosindu-se de energia la joasă tensiune, de căldură solară.

$$6\,CO_2 + H_2O = C_6H_{12}O_6 + 6\,O_2$$

(sau mai general $n\,CO_2 + m\,H_2O$ + căldură solară $= C_n(H_2O)m + nO_2$).

acid carbonic + apă = dextroză + oxigen.

Dextroza este transformată după aceea în amidon, $C_6H_{10}O_5$.

Putem spune prin urmare că viața încalcă în aparență neîncetat principiul minimei acțiuni și acest fapt oferă vitalismului un criteriu, un „test" matematic despre transcendența vieții. Puțini savanți cunosc acest „test" sau îi apreciază importanța.

Bergson îl întrevede neclar din punct de vedere termodinamic; el constată că organismele vii pot „opri", pot face să înceteze degradarea energiei, principiul lui Carnot, dar nu își dă seama că ele pot și răsturna, *încălca* legea. El scrie:

„Viața este cu putință pretutindeni unde energia coboară panta indicată de legea lui Carnot și acolo unde o cauză, cu direcție inversă, poate *întârzia* coborârea..." *(Evoluția Creatoare)*

El invocă în acest fel un demon al lui Maxwell, arbitrar, în loc să perceapă că viața însăși este cauza opririi, a întreruperii.

Dintre savanții moderni din Franța care au cugetat asupra însemnătății testului îl voi cita mai întâi pe R. Ruyer (*Elemente de psihobiologie)*; el admite că viața se abate de la principiul minimei acțiuni, „de la principiul entropiei și al amestecului nivelator" și declară că „demonul lui Maxwell", care intervine, este un „domeniu unitar", în stare să „survoleze" din punct de vedere psihic și să aleagă. „Forma adevărată este tematică și *semnificantă*[8]."

Iar Leconte du Noüy:

„Istoria evoluției vieții arată că are loc o creștere sistematică a asimetriilor structurale, în contradicție cu cea de-a doua lege a termodinamicii. Și nu pot fi puse deoparte ca niște „fluctuații rare", întrucât au crescut o dată cu succesiunea epocilor biologice până când au atins punctul maxim cu creierul omenesc". Și adaugă:

„După toate probabilitățile, transformările evoluției biologice par, până la un anumit punct, că nu se supun legii fizice fundamentale a lui Carnot-Clausius (forma termodinamică a principiului minimei acțiuni)... aceasta este derivată într-o aceeași direcție, direcție interzisă materiei inerte și care dă naștere la asimetrii tot mai mari, la stări tot mai „improbabile".

Iar H. Guilleminot (*Materia și Viața*) spune:

„În timp ce încălcările și opririle «improbabile» a celei de-a doua legi a termodinamicii au loc neîncetat în materia vie, Boltzmam a arătat că pentru ca această lege să fie zădărnicită într-un decilitru de gaz doar prin jocul întâmplării ar trebui să așteptăm un număr de secole egal cu 1 urmat de 10.000 de milioane de zerouri".

Dintre savanții englezi care au înțeles fondul problemei am să-l menționez pe Sir d'Arcy Thompson și lucrarea sa, *Growth and Form*[9], clasică de acum, și pe J. Johnstone (*The Mechanism of Life)*:

„Felul de a fi al organismului viu implică încălcarea legii a doua a termodinamicii."

Putem, de altfel, răstălmăci fraza:

„Viața încalcă principiul minimei acțiuni (precum și aspectele sale termodinamice, chimice, mecanice etc.)" prin enunțul:

„Viața nu încalcă întru totul legile fizico-chimice, ci într-un sistem închis care conține materie vie ea acționează ca și cum ar veni dintr-o dimensiune exterioară (a cincea dimensiune de pildă, perpendiculară pe celelalte patru ale lumii einsteiniene)".

Aceasta nu mai înseamnă că legile fizico-chimice sunt cu adevărat zădărnicite, ci doar că viața acționează sau poate acționa ca o forță exterioară chiar atunci când locașul său vizibil se află într-un sistem închis[10].

Această acțiune a vieții ca forță exterioară spațiului-timp al nostru cu patru dimensiuni se potrivește cu ipotezele recente despre „câmpurile de forțe organizatorice autonome" elaborate de dr. Stromberg în Statele Unite și de Raymond Ruyer (citat mai înainte) în Franța; aceste câmpuri de forțe se pare că acționează atât asupra dezvoltării embrionului din momentul fertilizării oului, cât și asupra creșterii ulterioare, făcând să intre în rezonanță cu ele circuitele electromagnetice și electrice ale organismelor vii. Aceste câmpuri de forțe s-ar găsi, în parte, în afara spațiului-timp obișnuit fizic și ar opera astfel dintr-o dimensiune exterioară acestuia. Am văzut că undele de cunoaștere sau de probabilitate ne-au sugerat deja ideea unui spațiu și a unui subeter exterioare spațiului-timp material.

În sistemele anorganice rolul principiului minimei acțiuni este, după cum am văzut, dominator și ușor de descoperit; acțiunea lui directoare apare limpede în cristalografie (a se vedea mai înainte într-o notă explicativă descrierea creșterii cristaline făcută de Sir d'Arcy Thompson) și în rețelele produse de echipartițiile regulate și semiregulate ale spațiului (simetrii cubice și hexagonale).

Dimpotrivă, în sistemele vii, atât în creștere, cât și în morfologia generală, pulsațiile asimetrice și simetriile geometrice care apar la plante și la organismele marine sunt pentagonale; pe de altă parte, aceste simetrii pentagonale nu apar niciodată în cristalografie deoarece pentagonul regulat, datorită structurii sale unghiulare, este potrivnic echipartiției. Dintre florile cu simetrie pentameră (adică întemeiată pe numerele 5 și 10 și multiplii lor) citățm toate florile arborilor sau arbuștilor cu fructe sau bace comestibile, *genus rosa*, lotusul, orhideea, căldărușa, floarea-soarelui, iar într-o ordine malefică uriașa stea de *Rafflesia Arnoldi*; crinul, stânjenelul, macul, laleaua, iasomia, crinul de pădure au, dimpotrivă, simetrie „cristalină" hexagonală. Am pomenit mai înainte legătura strânsă dintre pentagon, șirul lui Fibonacci 1, 2, 3, 8, 13, 21, 34, 55 ... și șirul ϕ al

Secțiunii de Aur; aceste două șiruri permit o creștere omotetică (geometrică) prin însumări de unități egale, fapt care explică predominanța lor în botanică, în conchiliologie, în proporțiile corpului omenesc și în multe opere de artă (în conformitate cu principiul analogiei de Thiersch) aparținând culturii de tip occidental în care se include și Egiptul. Toate acestea ar trebui să facă parte dintr-un capitol despre „Frumusețe și Număr" care nu-l voi include în cartea de față deoarece am tratat subiectul în amănunt în alte lucrări (în mod deosebit în *Numărul de Aur*). Voi spune doar câteva cuvinte în legătură cu o problemă de estetică în trei dimensiuni.

Întrucât șirul lui Fibonacci și șirul ϕ produc o creștere armonioasă conform principiului analogiei pentru linii și suprafețe, am putea fi ispitiți să vedem ce ar corespunde acestor două șiruri în spațiul cu trei dimensiuni, să construim un șir aditiv în trei timpi care ar produce în spațiu o creștere „gnomonică" bazată pe proporțiile volumului *pur* elementar, paralelipipedul dreptunghiular ale cărui proporții a, b, c, cresc la fel ca termenii șirului căutat. Acest șir aditiv în trei timpi există cu adevărat. Este șirul 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 174...

Însă șirul geometric riguros corespunzător, pe care-l vom numi $\psi, 1, \psi, \psi^2, \psi^3, ..., \psi^n$ ... în care $\psi^n = \psi^{n-1} + \psi^{n-2} + \psi^{n-3}$, din care s-ar putea obține paralelipipedul drepunghic ideal cu proporțiile $1, \psi, \psi^2$, are ca rație rădăcina reală a ecuației $\psi^3 = \psi^2 + \psi + 1$, rădăcină care nu se poate exprima decât prin radicaluri la cub și care, prin urmare, nu se poate construi după geometria euclidiană.

(Valoarea aproximativă a lui ψ este 1, 8395 ...).

Acest lucru nu are în practică nici o importanță, întrucât cele mai multe planuri arhitecturale precum și organismele vii care au un plan sau o axă de simetrie, modele în două dimensiuni bazate pe Secțiunea de Aur și pe șirurile ψ și F, sunt suficiente pentru a descoperi sau construi creșterile omotetice dorite.

NOTE

[1] Topologia se ocupă de proprietățile figurilor care rămân invariante în timpul transformărilor continue. Mai este numită în glumă: geometria straturilor de cauciuc deformabile.

[2] Trecem de la ecuația traiectoriei unei raze luminoase în spațiul obișnuit, $d_s^2 = c^2 \Delta t^2$ sau $\sum \Delta x_v^2 (v = 1,2,3) = c^2 \Delta t^2$ la $\sum \Delta x_v^2 = \sum \Delta (x_v')^2 = c^2 \Delta t^2$ (pentru două sisteme K și K^1, în mișcare uniformă unul față de celălalt) apar, prin $l = ct$ și $x_4 = l\sqrt{-1} = il$ la $\sum \Delta x_v^2 (v = 1,$

$2, 3, 4) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4 = 0$. Atunci când nu mai este vorba de ecuația simplă a unei raze de lumină, ci de intervalul între două evenimente din spațiul-timp cu patru coordonate, pătratul intervalului este dat tot de $s^2 = \sum \Delta x_v^2$ $(v = 1,2,3,4,) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_4^2$

[3] G's sunt coeficienții termenilor intervalului d_s (distanța generalizată) între două puncte în spațiul cu patru dimensiuni atunci când este reprezentat sub forma cvadratică:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + g_{44}dx_4^2$$
$$+ 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{14}dx_1dx_4$$
$$+ 2g_{23}dx_2dx_3 + 2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4$$

$$G = -2(K_1K_2 + K_2K_3 + K_3K_1 + K_1K_4 + K_2K_4 + K_3K_4)$$

(Permutările sau combinările nu sunt niciodată prea departe.)

K_1, K_2, K_3, K_4 sunt inversele razelor principale de curbură din spațiul cu patru dimensiuni (curbat într-un spațiu cu 5 dimensiuni). G este invariantul principal al formei cvadratice $g_{\mu\nu} \cdot dx_\mu \cdot dx_\nu$.

[4] Avem, de asemenea, $G_{\mu\nu} = \lambda \cdot g_{\mu\nu}$, în care λ este constanta cosmică din mecanica ondulatorie.

[5] Einstein stabilise și o formulă care dovedea că viteza relativă a două corpuri ce se mișcă în sens contrar cu viteze aproape egale cu viteza luminii rămâne totuși mai mică decât viteza luminii. Formula de compunere a vitezelor este:

$$V = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{C^2}} \qquad \text{dacă } v_1 \text{ sau } v_2 = c$$

atunci $V = c$

dacă $v_1 = v_2 = c$

atunci V este egal tot cu c.

[6] Un alt exemplu de efecte materiale neprevăzute (pentru bunul simț) și derivate din-tr-un principiu paradoxal: tehnica rachetelor (de tipul V_2) și a avioanelor-rachetă provine în întregime din principiul abstract al acțiunii și al reacțiunii conceput de Newton.

[7] „Porțiunea de materie pe care o denumim și pe care o putem urmări este o proiecție a conștiinței noastre individuale". (P. Langevin).

[8] Altfel spus: invariantul într-un organism este funcția, *tema*. Ruyer, de altfel, ca mai toți savanții antimaterialiști de astăzi, respinge eticheta de *vitalist*.

Însă el scrie:

„Anatomia este ordonată atât în timp cât și în spațiu (ceea ce nu este adevărat pentru *Gestalt*)... ontogeneza este pregătitoare a viitorului... Un pește adult este hidrodinamic deoarece este „pregătit", iar nu modificat în firicele de apă. Un troian de zăpadă modificat de vânt nu este o ființă, nu este o formă adevărată cu un potențial".

[9] „Corpurile anorganice cresc prin „aglutinare" ... moleculele noi care, una câte una, strat după strat, se juxtapun progresiv ... astfel încât să intre în legătură cu cel mai mare număr cu putință de particule limitrofe... (Fiecare moleculă) se va fixa în locul la care poate ajunge cât mai ușor; dacă nu există loc gol disponibil ea va ocupa poziția cu o energie potențială minimă față de vecinele sale deja adunate, energia sistemului fiind atunci în așa fel distribuită încât să nu mai rămână nici o forță rezultantă care să poată cauza o deplasare...

Dimpotrivă, corpurile organice cresc prin „intususcepție" sau „îmbibare", așa cum o bucată de gelatină poate crește în apă, lichidul pătrunzând în toată substanța ei..."

[10] Am să reproduc aici un fragment din cartea mea „Estetica proporțiilor" pentru a sublinia diferența dintre o forță exterioară și una interioară care acționează asupra unui sistem închis.

„Exemplu concret de acțiune exterioară: pe o masă sunt puse un pendul care oscilează și o eprubetă în care are loc o reacție chimică; pot considera că masa, eprubeta și pendulul (ar trebui spus combinarea „pendul glob-terestru" pentru a introduce corect funcția potențială) ca un sistem aproximativ izolat. Principiul minimei acțiuni, aplicat în forme potrivite, permite să se prevadă tot ce se va întâmpla atâta timp cât nu va interveni nici o forță exterioară. Dacă un observator din cameră dă un bobârnac pendulului sau toarnă acid sulfuric în eprubetă sau dacă o pală de vânt răstoarnă lucrurile din cameră, atunci sistemul pendul-masă-eprubetă se va abate de la ecuațiile hamiltoniene stabilite mai înainte deoarece intervenția acestor forțe nu a fost prevăzută de aceste ecuații în care, datorită „regulilor jocului", nu am introdus decât date rezultând din energii potențiale, cinetice, chimice etc., care aparțineau sistemului masă-eprubetă-pendul. Or, o discordanță asemănătoare s-ar fi produs dacă sistemul ar fi cuprins un vas cu pești roșii sau dacă eprubeta conținea o cultură microbiană."

CAPITOLUL XVI

NUMĂR ȘI POEZIE – NOTAȚIA LUI PIUS SERVIEN – DIHOTOMIA LIMBAJULUI – LIMBAJ ȘTIINȚIFIC ȘI LIMBAJ LIRIC – METAFORA ȘI ANALOGIA

Legea Numerelor generează, așadar, simțămintele și imaginile, iar ceea ce pare a fi exteriorul este pur și simplu interiorul.

(FLAUBERT, Scrisoare către George Sand, 1876)

Nimeni nu contestă prezența sau influența ritmului în limba scrisă sau vorbită, sau în muzică; am văzut, de asemenea, că ritmul și numărul erau concepte asociate în antichitatea greacă și că rădăcina etimologică „rhein" (a curge) din *rithmos* și *arithmos* era aceeași, val, curgere de accente sau de monade. Dar, deși în epoca Renașterii elisabetane cuvântul „numere" se mai aplica ritmurilor poetice, de abia epocii noastre îi revine transpunerea în numere precise a ritmurilor, nu numai în poezie, ci și în proză și aceasta datorită lucrărilor lui Pius Servien și egalei sale competențe în estetică, prozodie, muzică și matematică.

Am mai dat (în cap. II) definiția, clasică de-acum, a ritmului; nu repet decât esențialul[1].

„Ritmul este periodicitate percepută ... El acționează în măsura în care o astfel de periodicitate deformează în noi curgerea obișnuită a timpului ... În felul acesta orice fenomen periodic perceptibil pentru simțurile noastre se desprinde din mulțimea fenomenelor neregulate ... pentru a acționa singur asupra simțurilor noastre..."

Periodicitatea, în cazul ritmului sonor, se desprinde pe o textură, pe un spalier de elemente consecutive numărabile, silabe și picioare în prozodie (picioarele sunt fie elemente tonice, foneme, fie, ca în prozodia grecească sau latină, grupuri cu durate determinate ce se pot măsura), note și măsuri în muzică. Găsim aproape întotdeauna, atât în prozodie, cât și în muzică, mai multe periodicități suprapuse, repetiția izocronă (cu intervale de timp egale, ca tic-tacul unei

pendule) picioare sau măsuri, silabe sau note care formează textura de fond, ca să spunem așa, statică, pe care aleargă, suprapunându-se, combinându-se, periodicități mai complexe, deseori asimetrice, care constituie ritmuri dinamice propriu-zise: metrul și ritmul. Dar periodicitatea izocronă, statică în aparență, a tic-tacului ceasului este, de fapt, de pe acum ritm (ascensiunea de la pauză la bătaie); duruiturile tobei, cu frecvențe, intensități și durate egale, constituie de asemenea o succesiune ritmată, fiecare element având un ritm dinamic intern. Aceeași observație e valabilă privitor la „ritmul în spațiu" dacă privim un mozaic sau o pardoseală cu motive repetate în chip uniform.

Ernest Lévy, într-o comunicare prezentată la primul Congres al ritmului, de la Geneva (1926), intitulată „Metrică și ritmică", sublinia faptul că cele două modele de ritm, cel static și dinamic, sau, pentru a fi mai precișii, cadență statică sau metru, și ritmul propriu-zis, dinamic, ne sunt oferite de două valuri fiziologice, cadența aproximativ stabilă a inimii omenești și ritmul asimetric, dinamic, al respirației, legat indisolubil de sistemul afectiv. Ernest Lévy precizează:

„Se numește *metru* energia desfășurată după principiul ordinii, ritm energia dezvoltată după principiul cauzei și al efectului".

Remy de Gourmont scrisese deja că ritmul prozodic (timpii forte ai ritmului intensităților) coincide cu ritmul emotiv (timpii forte ai pasiunii). Nu trebuie decât să recităm o bucată prozodică cu încărcătură emotivă pentru a verifica justețea acestei observații; acest ritm al accentelor de intensitate este, în limba scrisă sau vorbită, ritmul *tonic*. Voi cita aici o idee ingenioasă a lui Espé de Metz care-l parafrazează pe Buffon:

„Stilul, adică expresia scrisă a ritmului personal ajutat de ritmul tonic, este omul însuși."

Pius Servien a insitat asupra însemnătății accentului de intensitate în limba franceză, fie că este vorba de o frază în proză sau de un grup de versuri. Acest ritm tonic coincide, în general, cu ritmul duratelor. Dar Pius Servien a elaborat și o teorie originală a limbajului în general, în care își intercalează în mod cât se poate de logic teoria despre ritmuri cu analize doveditoare[2]. Voi rezuma în continuare modul logistic în care abordează problema limbajului în general.

El împarte limbajul scris în două părți care prezintă caracteristici diferite și care sunt, într-adevăr, cu toate că se folosesc de aceeași

materie verbală, domenii diferite din punct de vedere logic. Unul este „limbajul științelor", celălalt „limbajul liric".

„Limbajul științelor" (logicienii pozitiviști sau empiriști folosiseră și până acum acest termen însă fără să-și dezvolte definiția) pe care l-am putea numi și „limbajul cunoașterii" sau „limbajul logic", pe care-l voi numi aici, pentru a simplifica, L.ș, are următoarele proprietăți:

1° Fiecare din frazele lui are un singur înțeles și nu mai multe.

2° Unei fraze în L.ș îi putem găsi oricând o altă frază echivalentă.

3° L.ș. poate fi tradus în întregime într-o altă limbă.

4° Sensul frazelor L.ș este independent de ritmul lor.

5° Când ne mărginim la L.ș, sensul operațiilor sale, adevărat sau fals, va trebui să se bucure de proprietatea de a fi la fel de inteligibil pentru mai mulți oameni, și nu doar pentru unul singur. În chip virtual, pentru toți.

6° Negarea oricărei propoziții ș (carc aparține de L.ș) este, de asemenea, o propoziție ș.

7° Dacă *a rezuma* este o operație posibilă, ne aflăm în L.ș.

L.ș. este o zonă a limbajului total; este mulțimea tuturor frazelor în legătură cu care este cu putință să se cadă întru totul de acord asupra înțelesului lor. Acest domeniu cuprinde fraze echivalente care se pot traduce dintr-o limbă în alta. În sfârșit (aceasta nu face parte din postulatele care însoțesc definiția, dar constituie o teoremă de logistică): numărul înțelesurilor pe care îl putem transmite prin L.ș este un infinit numărabil.

Iată acum caracteristicile, mai greu de enunțat, ale „limbajului liric" sau L. l.:

1° Nici una din proprietățile enunțate mai sus pentru L.ș. nu este adevărată pentru L.l. De exemplu, frazele L.l. nu au, fiecare, un înțeles, același pentru toți. „Pentru asemenea fraze (scrie Pius Servien) nu există în lume nici o frază care să le fie echivalentă."

De pildă iată un vers din Claudel, în *Soulier de Satin*:

„L'Amérique, comme une immense corne d'abondance, je dis ce calice de silence, ce fragment d'étoile".

Aceste fraze se nasc din ritm, iar înțelesul lor nu este independent de ritmul lor. L.L. este o zonă a limbajului real în care sensul frazelor este strâns legat de ritmul lor. Sunt fraze ce nu pot fi reduse la L.ș. („Le vierge, le vivace et le bel aujourd'hui".)

2° L.l. este transcendent față de l.ș. Însă unele cuvinte sunt lirice prin poziția lor, altele prin natura lor.

„Cu aceste cuvinte vii, nu ne este niciodată cu putință să știm în ce măsură ne înțelegem unii cu alții" (Pius Servien).

Am putea crede că Pius Servien, punând această transcendență a L.l. în raport cu L.ș., va renunța să-l analizeze pe cel dintâi cu ajutorul celui de-al doilea, care este momentan unealta fundamentală a cunoașterii precise. Dimpotrivă tocmai aici își va vădi întreaga lui ingeniozitate. Am văzut într-adevăr apărând cuvântul ritm asociat cu L.l.; or, cine spune ritm, spune număr. Și tocmai ritmul tonic, pomenit mai înainte, ritmul accentelor de intensitate este acela care îi oferă mijlocul de a exprima imponderabilele lui L.l. în șiruri discontinui, adică în numere. El descompune, pentru aceasta, textura versului sau a prozei în *foneme*, adică în grupuri de silabe neutre terminate printr-o silabă tonică; fiecare frază (sau fiecare vers) va avea un număr *reprezentativ* N definit astfel:

N va avea atâtea cifre câte accente tonice are fraza; fiecare cifră reprezintă, așadar, un fonem, un șir de silabe neutre terminate cu o silabă forte, o tonică. Versul lui Heredia, de pildă:

Et l'étamine lance au loin le pollen d'or
⏑ ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ –

va avea ca număr reprezentativ 444.

Dans le fond des forêts votre image me suit (Racine)
⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ –

va avea 3333.

Ritm mai neregulat, dar foarte efectiv, de asemenea, în asimetria lui:

Les mains pleines des jours légers que nous portons (Elena
⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ –

Văcărescu) va avea 354.

Din proza lui Henri de Régnier:

„Je regarde... debout en ses armes glacées, l'antique portrait
⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ –

taciturne, avec sa face pâle et son épée, du chevalier qui a dormi
⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ –

dans la neige",
⏑ ⏑ –

va avea N = 3333,233,64,443.

În prozodie, în notația lui Pius Servien, vocalele mute de la sfârșitul unui vers nu se socotesc, dar sunt însemnate cu un apostrof după tonica fonemului pe care îl închide.

Exemplu:

Si je n'offense point les charmes que j'adore (Racine) N = 4224'.
⏑ ⏑ ⏑ – ⏑ – ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ –

Vedem că la toate aceste texte specific lirice (inclusiv proza lui Henri de Régnier) se aplică remarca lui Pius Servien (în legătură cu un alt exemplu):

„Toate proprietățile ritmice ale textului (din punct de vedere tonic și aritmetic) sunt strânse în acest număr, tot ce este străin a fost înlăturat".

Am obținut *invariantele* ritmurilor. Pius Servien își prezentase deja notația în lucrarea *Eseu asupra ritmului tonic al limbii franceze*, însă de abia în *Principii de estetică* (Boivin et Cie) ne arată pe ce cale logică și chiar logistică a ajuns să execute turul de forță de a capta toate calitățile unui text liric, calități nemateriale și transcendente prin definiție în raport cu L.ș., printr-o notație discontinuă luată din ceea ce este mai concret în L.ș, din aritmetică.

Iată prezentarea „logistică" a tehnicii, văzută din culise. Pentru a descrie legile, proprii expresiei lirice dacă există vreuna, putem:

Să-i dăm unui „elector", L, care nu ascultă de criteriul liric, sarcina de a face o clasificare λ a fenomenelor din domeniul liric (adică să aleagă după acest criteriu un anumit număr de texte cu caracteristici, pozitive sau negative, care le situează în clasa definită mai înainte ca L.l.), apoi:

Să supună examinării aceste rezultate cu ajutorul unui „controlor" S, pentru a vedea dacă găsește în ele caractere care aparțin L.ș., ce i-ar permite, eventual, să facă o clasificare $\sum$ în termeni caracteristici sau logistici care țin de L.ș.

Pius Servien constată că, în orice text ales de elector ca fiind liric, controlorul recunoaște o structură sonoră regulată sub formă de periodicități numărabile, de ritmuri (elucidate prin medota explicată mai înainte a numerelor N caracteristice); „această structură sonoră se traduce în cifre distribuite nu la întâmplare, ci după o anumită lege simplă".

Vom observa că Pius Servien folosește pentru silabele lirice și neutre simbolurile – și ⏑ din analiza metrică și prozodică în care desemnează silabele lungi și scurte. Acest procedeu este pe deplin îndreptățit, deoarece (am spus-o mai înainte) ritmul de intensitate și cel al duratelor coincid, în general.

Iată un exemplu de ritm în întregime trohaic (folosit rar în limba franceză), ultimele versuri din frumoasa odă închinată Afroditei, parafrazată de Pius Servien prin folosirea măsurilor antice:

laisse ton sein crispé peser sur mon âme, ô Caresse,
– ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑⏑ –

lourd comme toutes nos peines, brûlant comme Eros l'avide
– ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑– ⏑ –

laisse tes boucles d'étoiles flotter sur mes yeux qui s'aveuglent...
– ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑–⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ –

N = 132233', 133332', 133333'

Și explozia trohaică din „Cimitirul marin" de Valéry:

Oui! Grande Mer de délires douée,
– – ⏑ – ⏑ ⏑–⏑⏑ –

Peau de panthére et chlamyde trouée
– ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ –⏑⏑ –

De mille et mille idoles du Soleil,
⏑ – ⏑ – ⏑–⏑ ⏑ ⏑ –

Hydre absolue, ivre de ta chair bleue.
– ⏑ ⏑ – – ⏑⏑ ⏑ ⏑ –

N = 11233' 1333' 2224' 1315'

Pius Servien își încheie expunerea (*Les rythmes comme introduction physique à l'Esthétique*, Boivin et Cie) cu afirmația:

„Noi admitem deci, în principiu, că ori de câte ori vorbim de ritmuri, percepem, mai mult sau mai puțin sigur, numere". Și:

„Se pare că singura noțiune numerică în stare să urmeze noțiunea de ritm în toată extinderea ei este aceasta: Șirul numerelor întregi în care descoperim o lege simplă". Regăsim „periodicitatea percepută". Nu este, așadar, nevoie să-mi cer iertare pentru că am introdus acest rezumat al metodelor lui Pius Servien într-o lucrare închinată Numărului[3].

După cum s-a exprimat Paul Claudel în unul din luminoasele lui comprimate: „Inspirația poetică se deosebește prin darul imaginii și al numărului".

Am descoperit Numărul, hai să ne ocupăm acum de imagine, prin mijlocirea analogiei și, pentru aceasta, să evocăm iarăși afirmația dintre analogie și proporție, menționată încă de la începutul acestor lucrări. Am amintit că noțiunea de proporție geometrică $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ nu este decât imaginea sau, mai degrabă, transcrierea matematică a unui principiu general al analogiei:

A este față de B cum este C față de D, A, B, C, D fiind valori oarecare, mărimi, calități etc. În geometrie, proporția geometrică introduce omotetia, similitudinea formelor în conformitate cu cele două teste capitale ale esteticii, fraza cheie a lui Vitruviu despre simetire în sensul antic al cuvântului și principiul analogiei al lui Thiersch:

„Am descoperit, cercetând operele cele mai izbutite din toate timpurile, că în fiecare din aceste opere se repetă o formă fundamentală și că părțile alcătuiesc, prin compunerea și dispunerea lor, figuri asemenea. Armonia nu reiese decât din repetarea figurii principale a operei în subdiviziunile ei".

Este vorba, după cum se vede, de similitudine, de omotetie, nu de identitate, de egalitate superpozabilă. Fraza lui Thiersch este o reflectare a principiului analogiei în natură, enunțat acum două mii cinci sute de ani de Pythagoras, versul din Hieros Logos[4]. Alberti, la sfârșitul secolului al XV-lea, repetă aceiași termeni ai lui Pythagoras.

Apoi, principiul analogiei este uitat, excepție făcând grimoarele alchimiștilor, și reapare în chipul cel mai neașteptat în povestirea lui Edgar Poe, care introduce în literatură cel dintâi tip de detectiv, *Scrisoarea pierdută.*

Acest detectiv, foarte discretul și cultivatul Chevalier Dupin, care răsfoise probabil, în clipele lui de răgaz, dacă nu „Versurile de aur" ale lui Pythagoras, cel puțin vreun tratat de al lui Paracelsus sau Agrippa, se exprimă astfel:

„Lumea materială este plină de analogii riguroase care corespund lumii nemateriale și se pare că o oarecare aparență de adevăr ar fi legată de dogma propusă în retorică, după care metafora sau

comparația pot fi corect folosite în întărirea unui argument sau pentru a înfrumuseța o descriere".

Metafora este, într-adevăr, transpunerea analizei în general în domeniul literaturii, proză sau poezie. Expresia generală a analogiei:

A este față de B așa cum este C față de D poate reprezenta atât o metaforă, cât și o proporție geometrică, dar metafora se întâmplă să fie rar amănunțită în patru termeni expliciți, căci o metaforă bună trebuie să prezinte, pe lângă una sau două comparații potrivite, o condensare eliptică și un element neașteptat, o surpriză, o iluminare. De aceea este de multe ori redusă la 3, 2 sau chiar la un singur termen: metaforele eliptice frapante (uneori absurde) sunt, în general, cele mai bune, în poezie cel puțin.

Definiția cea mai mulțumitoare a metaforei este tot aceea a lui Aristotel; pentru el, a găsi o metaforă bună este „un semn de geniu original, deoarece o metaforă bună implică perceperea intuitivă a similitudinii în lucruri neasemănătoare".

Dăm iarăși de principiul analogiei. Am dat, în alte lucrări, exemple de metafore cu număr variabil de termeni; Victor Hugo și Shakespeare au fost regii acestui domeniu, izbutind metafore riscate până la absurd...

Un exemplu perfect de metaforă articulată (cu patru termeni)

„Et comme un *air* qui sonne au *bois creux* des quitares,
J'ai fait chanter mon *rêve* au vide de ton *cœur* ..."

air în *bois creux* ca și *rêve* în *cœur* are exact aceeași structură ca:

A față de B ca C față de D. Și *bois creux* și *vide* aduc o comparație adițională.

În primele două versuri din poemul lui L. Bouillet, doi dintre termeni sunt reduși la unul singur, *l'archet*, la propriu și la figurat.

Tu n'as jamais été, même aux jours les plus rares,
qu'un banal *instrument* sous mon *archet* vainqueur.

Exemple de metaforă cu un singur termen:

„My salad days" a lui Shakespeare și extraordinara și intraductibila expresie a lui Edgar Poe „Of late, eternal *condor* years..." în care anii tumultuoși sunt comparați cu niște condori ale căror aripi gigantice zguduie cerul cu bătăile lor.

Să urmărim mai îndeaproape calea pe care a parcurs-o conceptul analogiei în literatura franceză după Edgar Poe:

Charles Baudelaire: „Imaginația este cea mai științifică dintre facultăți întrucât numai ea cuprinde analogia universală".

Scrisoare a lui Paul Valéry, în vârstă de 18 ani, către Mallarmé pe care nu-l întâlnise încă:

„O devoțiune deosebită față de Edgare Poe mă silește să proclam analogia drept adevăratul regat al Poetului. El trebuie să facă perceptibile rezonanțele încărcate de taină ale lucrurilor și armonia lor ascunsă tot atât de reale, tot atât de sigure ca un raport matematic pentru toate spiritele înclinate spre artă, adică în chip firesc, pasionat, idealiștii". De reținut introducerea intuitivă a raportului matematic.

În primul răspuns dat lui Valéry, Mallarmé scrie:

„Dragă Poete,

Darul analizei subtile, cu muzica adecvată, îl ai, desigur, și asta-i totul".

Iată acum, inspirată și ea mi se pare tot din fraza lui Chevalier Dupin, faimoasa scrisoare a lui Mallarmé către Verlaine, care precizează că:

„Explicarea orfică a Pământului este singura datorie a poetului și jocul literar prin excelență".

Spiritul pătrunzător al lui Huysmans descoperise foarte bine această obsesie a analogiei la Mallarmé. Astfel, în *A Rebours*:

„Percepând cele mai îndepărtate analogii, desemnând adeseori printr-un termen care oferea, în același timp, printr-un efect de similitudine, forma, mireasma, culoarea, cantitatea, strălucirea..., izbutea să stabilească astfel enunțul comparației care se statornicea, absolut singură, în mintea cititorului, prin analogie,. de cum pătrundea simbolul."

Și Jung:

„Analogia este singura limbă pricepută de subconștient".

NOTE

[1] *Essai sur les Rythmes Toniques du Français*, Les Presses Universitaires de France.

[2] *Principes d'Esthétique* (Boivin et Cie).

[3] Am notat deja că disocierea limbajului operată de Pius Servien în aceste două domenii, limbajul științelor și limbajul liric, permite să se rezolve fără greutate multe probleme de logică simbolică și de semantică în care se împotmoliseră logicienii pozitiviști (Carnap etc.).

[4] „Vei afla atât cât îi este îngăduit unui muritor, că Natura este în orice punct al ei, asemenea sieși".

CAPITOLUL XVII

NUMĂRUL ȘI MUZICA – TEORIA MATEMATICĂ A GAMELOR – MODULAȚIE, PROPORȚIE, EURITMIE

Muzica este pentru Timp ceea ce este Geometria pentru Spațiu.

(Francis WARRAIN)

Dacă pentru aceia care nu cunosc teoria lui Pius Servien rolul numerelor în poezie poate părea neclar, nu același lucru se întâmplă când este vorba de muzică. Toată lumea știe, într-o mai mică sau mai mare măsură, că notele gamei au frecvențe diferite, de care depinde înălțimea sunetului, frecvențe exprimate prin numere; alții știu că sunetele, chiar cele nemuzicale, pot fi analizate prin șiruri sinusoidale care exprimă „armonicele" în care aceste sunete pot fi, în general, descompuse; dar noțiunile acestea rămân deseori vagi, iar cei care le dețin au impresia sau teama că frumusețea, intensitatea emoțiilor sau senzațiilor stârnite de muzică, serioasă sau ușoară, ar fi stricate dacă s-ar încerca identificarea acestor senzații eterate sau plăcute cu niște entități așa de prozaice și seci cum sunt șirurile de numere.

Dimpotrivă, pitagoreicii, a căror teorie muzicală se întemeia încă de la început pe studiul matematic al intervalelor dintre note, al lungimii corzilor ce corespund acestor note și pe conceptul de proporție (aritmetică, geometrică sau armonică), care constituia baza acestui studiu, socoteau că este firesc ca numerele, care reglau sau închistau fără putință și tăgadă armonia unui cosmos bine rânduit, să aibă același rol în artă în general, în muzică în particular.

Așa cum a scris Leibniz, după mai bine de 2000 de ani de la Pythagoras: „Muzica este un exercițiu de aritmetică secretă, iar cel care se consacră ei nu știe că mânuiește Numere ". (Scrisoarea către Goldbach din 17 aprilie 1712). Voi încerca în continuare să-l inițiez pe cititorul benevol în rolul precis al numerelor în muzică sau, ca să fiu mai puțin pretențios, în teoria gamelor, instrumente esențiale ale armoniei muzicale.

Atât în cristalografie, cât și în muzică, armătura principală a acestei matematici a gamelor o constituie tocmai „numerele mici", 2, 3, 4, 5. Am văzut până acum că Tetraktys-ul 1, 2, 3, 4 dădea raporturi proporționale cu fracțiile corespunzătoare intervalelor fundamentale, adică raporturilor lungimilor corzilor unei lire tetracorde fundamentale; fracțiile erau 2/1 sau 4/2 pentru octavă, 4/3 pentru cvartă, 3/2 pentru cvintă. Dar este mai bine pentru început să examinăm felul în care a stabilit Pythagoras gama diatonică sau pitagoreică, bază a gamelor occidentale de mai târziu cât și a gamelor moderne, majoră și minoră și a gamei temperate cromatice.

Ne dăm îndată seama că numărul cinci joacă aici, ca și în artele vizuale și în morfologia organismelor vii, un rol precumpănitor cu toate că în Tetraktys el nu apare decât ca suma dintre 2 și 3 sau câtul

$$\frac{1+2+3+4}{2} = 5.$$

Acest rol se manifestă între altele prin însemnătatea pe care o are *cvinta* în stabilirea scării diatonice și în structura acordurilor perfecte.

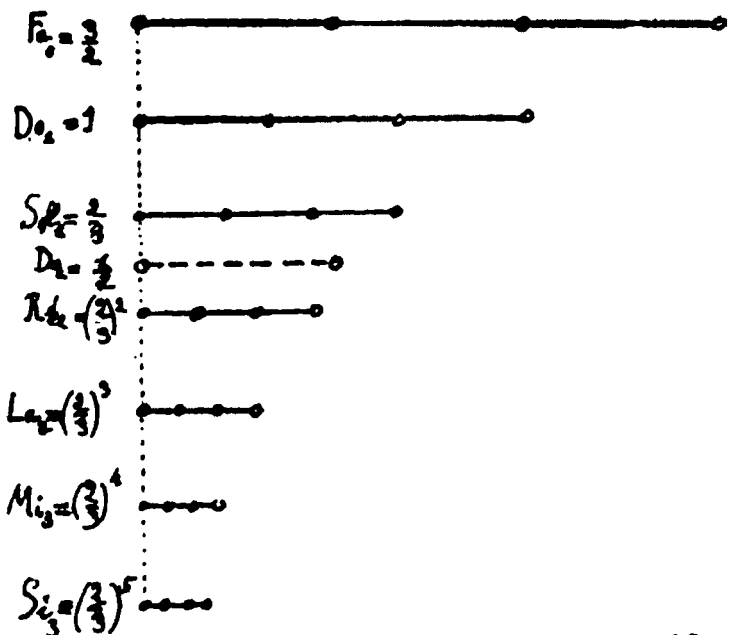
Gama diatonică primitivă sau gama lui Pythagoras este întemeiată într-adevăr pe intervalul[1] de cvintă, care desparte sunetele emise de două corzi omogene ale căror lungime se află în raportul 2/3.

Dacă ne închipuim șapte corzi de lungimi descrescătoare astfel încât fiecare să fie egală cu 2/3 din cea precedentă (planșa XIX) și dacă luăm coarda a doua ca unitate de lungime, numind-o Do_1, putem da celor șapte corzi, începând cu prima următoarele nume:

Fa_0	Do_1	Sol_1	Re_2	La_2	Mi_3	Si_3
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

Fracțiile de sub note reprezintă lungimile corzilor dacă luăm pe Do_1 ca unitate.

Fiecare coardă este prin definiție *cvinta justă* (ascendentă) a celei precedente; o nouă coardă cu lungimea 1/2, situată între Sol_1 și Re_2 va fi „în octavă" de Do_1 și va lua numele de Do_2. Trebuie acum să aducem în interiorul octavei Do_1–Do_2 notele care au aceleași timbruri ca Fa_0, Re_2, La_2, Mi_3 și Si_3; pentru aceasta este de ajuns să împărțim pe Fa la 2 obținând astfel octava ei Fa_1 (este vorba de lungimile corzilor), să înmulțim cu 2 pe Re_2 și pe La_2 și cu 2^2 pe Mi_3



PLANȘA XIX

și pe Si_3 (frecvențele vor fi de fiecare dată *împărțite* la numărul corespunzător $1/2, 2, 2^2$). Obținem astfel:

Do_1 Do_2

$$1 \quad \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{9} \quad \frac{2^6}{3^4} = \frac{64}{81} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2^4}{3^3} = \frac{16}{27} \quad \frac{2^7}{3^6} = \frac{128}{243} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{9} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{243}{256} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{243}{256}$$

Vedem că tocmai a 5-a notă furnizează intervalul de cvintă în raport cu fundamentala, de unde numele de *cvintă*. Am obținut astfel gama diatonică pitagoreică; rândul următor dă frecvențele corespunzătoare (invers proporționale cu lungimile corzilor), luând pentru Do_1 pe 2, 5, 6 din Do din „gama fizică" în care notele Do sunt reprezentate prin puterile lui 2 începând cu 16, adică $2^4 = 16$ $2^5 = 32$ $2^6 = 64$ $2^7 = 128$ $2^8 = 256$ etc.

Frecvențele gamei diatonice pentru $Do_1 = 256$.

Do_1	Re_1	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do_2
256	288	324	$341\frac{1}{2}$	384	432	486	512
	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$

Al doilea rând dă intervalele[2] dintre notele succesive (8/9 este tonul diatonic, 243/256 este semitonul diatonic); acest rând se mai poate scrie și astfel:

Ton ton Semiton Ton ton ton Semiton.

Vedem că gama diatonică, din cauza principiului generării prin cuvinte, este *asimetrică*, fapt care îi dă calitățile melodice și tonale, precum și jocul modulațiilor ce se poate scoate din ele; aceasta se aplică și gamelor moderne care au ieșit din ea, gama majoră și gama minoră (aceasta în trei varietăți).

Suita tonală cea mai înaltă este, totodată, cea a modului lidian antic și a modului major actual.

Pitagoreicii obțineau, de asemenea, gama diatonică plecând de la un *do* fundamental și intercalând două tonuri între *do* și cvarta sa, socotită 3/4, și alte două între cvinta sa, socotită 2/3 și octava 1/2.

Tonul 8/9 este „diferența" dintre cvartă și cvintă, diferență având aici semnificația de cât, ca în notația logaritmică (*sumă* va însemna, de asemenea, în realitate produs). Gama diatonică va apărea atunci în mod automat, iar semitonurile Mi–Fa și Si–Do, asimetriile fundamentale, se impun (Semitonul 243/256 este numărul cu care trebuie să înmulțim pe $8/9 \times 8/9$ pentru a obține 3/2, iar 128/256 pentru a obține 1/2)

Gama majoră modernă este o gamă paralelă ca structură cu gama diatonică pitagoreică, însă derivată teoretic din șirul armonicelor

(vom vedea mai departe în cel fel), ceea ce face ca intervalele sale să se deosebească puțin de cele pitagoreice.

Iată gama majoră

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do	notele
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$	lungimea corzilor
256	288	320	341	384	426	480	512	frecvențele
	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{15}{16}$	intervalele

Seria Ton Ton Semiton Ton Ton Ton Semiton rămâne valabilă ca structură însă în locul unui singur ton distonic avem două tonuri ușor diferite, 8/9 și 9/10. Semitonul este 15/16 în loc de 243/256. Valoarea 256 pentru Do este și aici luată din șirul „natural" al octavelor $2^4 = 16, 2^5 = 32 \ldots 2^8 = 256$.

Avem trei game minore:

1° Gama în *La* – fără alterații (vom vedea mai departe ce înseamnă acest lucru)

La	Si	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La
T	t	T^1	T	t	T	T^1	

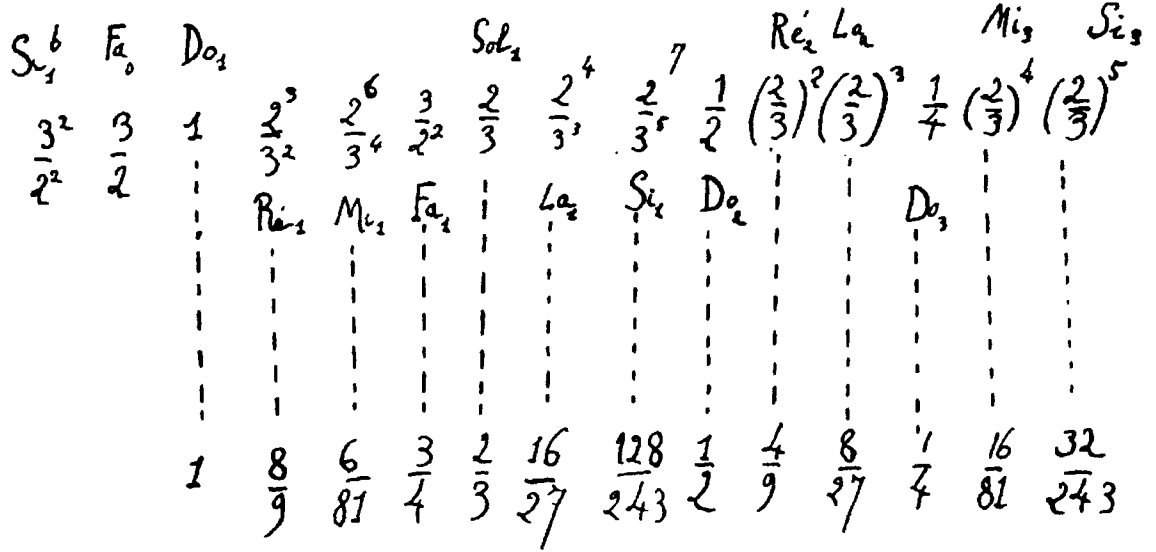
echivalentă cu Do re Mi^b Fa Sol La^b Si^b Do; aceasta este gama minoră clasică sau pitagoreică derivată din modurile antice, eolian sau hipodorian.

2°	Do	Re	Mi^b	Fa	Sol	La	Si	Do
	T	t	T'	T	T'	T	t	
3°	Do	Re	Mi^b	Fa	Sol	La^b	Si	do
	T	t	T'	T	t	t' + T	t	

Cu T sau T' ton, t sau t^1 semiton

$T = 8/9$ $T' = 9/10$ $t = 15/16$ $t' = 24/25$

Principiul alterațiilor (diezi și bemoli ale căror notații le-am introdus fără aviz prealabil) provine, de asemenea, din Gama pitagoreică a cvintelor. Referindu-se într-adevăr la ea și la formarea ei prin repetarea notelor în octavă ne putem da seama că cvinta justă a lui Si_3 nu este $Fa_4 = 3/2^5$ ci $2^5/3^5 \times 2/3 = 2^6/3^6$, iar $3/2^5$ este mai mare decât $2^6/3^6$. Numim această cvintă justă (trei tonuri și un semiton) a


Si♭1 Fa0 Do1 Sol1 Ré2 La2 Mi3 Si3
Ré1 Mi1 Fa1 La2 Si2 Do2 Do3
GAMME DES QUINTES

PLANȘA XX

lui Si, $Fa_4^{\#}$ sau Fa_4 diez. Continuând înșiruirea cvintelor ascendente obținem cvintele juste $Fa_4^{\#}$ $Do_5^{\#}$, $Do_5^{\#}$ $Sol_5^{\#}$, $Sol_5^{\#}$ $Re_6^{\#}$, $Re_6^{\#}$ $La_6^{\#}$, $La_6^{\#}$ $Mi_7^{\#}$, $Mi_7^{\#}$ $Si_7^{\#}$, toate aceste note cu diez putând fi introduse și în intervalul octavei prin multiplicări apropiate cu puteri ale lui 2 (o notă situată în octava ascendentă a alteia corespunde unei corzi cu o lungime de două ori mai mică, dar cu frecvența de două ori mai mare, ș.a.m.d.; a n octavă va corespunde unei lungimi de 2^n ori mai mică însă unei frecvențe mai mare de 2^n ori. În același fel, pentru octavele joase, coborâtoare, este invers: lungimile cresc, frecvențele se micșorează asemenea puterilor n ale lui 2).

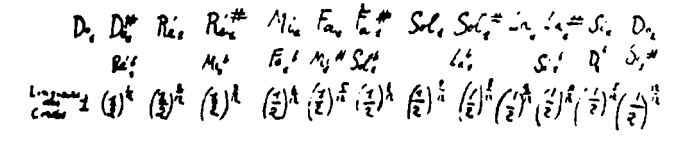
De asemenea, dacă încercăm să alcătuim șirul coborâtor al cvintelor vom vedea că cvinta gravă al lui Fa_0, în loc să coincidă cu $Si_{-1} = 2^9/3^5$, este dată de o coardă cu lungimea $(3/2)^2$ care cade între La_{-1} și Si_{-1}, căci $La_{-1} = 2^6/3^3 > (2/3)^2 > 2^9/3^5$. Numim Si_{-1} bemol sau Si_{-1}^{b} nota corespunzătoare acestei corzi cu lungimea $(2/3)^2$. Intervalul care desparte o notă naturală de nota sa cu diez (mai înaltă) este semitonul cromatic $2^{11}/3^7$; același interval desparte o notă naturală de aceeași notă cu bemol (mai gravă). Când *temperăm* gama, cum se întâmplă cu pianele obișnuite, egalăm $Do^{\#}$ și Re^{b} ect., anulând, „coma pitagoreică", $2^{19}/3^{12} = 0{,}98656$ ..., care desparte în realitate o notă cu bemol de nota cu diez din nota precedentă (o gamă care ar conține toate notele cu diezi și bemoli prin intervalele lor teoretice ar fi riguros *cromatizată*). Coma pitagoreică de care tocmai am pomenit are ca fracție caracteristică „diferența" (în realitate câtul) dintre semitonul cromatic și semitonul diatonic, $2^{19}/3^{12} = 2^{11}/3^7 : 3^5/2^8$.

Gama majoră poate, de asemenea, să se „cromatizeze"; notele, „alterate"; diezii și bemolii se introduc atunci în felul următor: se diezează o notă urcând-o cu un semiton minor, adică înmulțind-o cu $24/25 = 9/10 : 15/16$ și micșorând astfel cu a 25-a parte lungimea cozii care scoate această notă; se bemolizează o notă coborând-o cu un semiton minor, adică înmulțind-o cu 25/24, mărind astfel cu 1/24 lungimea corzii corespunzătoare.

În gama temperată propriu-zisă, care figurează pe pianele obișnuite, diezii și bemolii sunt identificați, fapt care ne dă medii aproximative ale cromatismelor exacte ce sunt suficiente în practică. În această gamă, cele 12 intervale sunt repartizate în mod egal într-o progresie geometrică cu rația $\sqrt[12]{2}$

Gama temperată

Gamme Tempérée



Rândul al doilea reprezintă lungimile corzilor. Să reținem că deși gama temperată procedează prin intervale egale (fiecare semiton este egal cu $\frac{1}{2^{\frac{1}{12}}}$ sau $\sqrt[12]{\frac{1}{2}} = 0{,}944$) octava nu este asemănătoare cu ea însăși în toate părțile ei; contracțiile Mi Fa și Si Do rămân, cvinte pitagoreice, moștenite de la zona diatonică, asimetrică, fapt care înlătură monotonia unei simetrii monotone perfecte (care apare în gama cu tonuri întregi folosită uneori de Debussy).

Mai există și o altă metodă pentru a construi gama majoră naturală sau gama fizicienilor (numită și gama lui Zarlin), plecând de la principiul afinității sunetelor (două sunete sunt cu atât mai înrudite cu cât au mai multe armonice) și de la teoria armonicelor. Se întâmplă că fiecare notă pură emisă de un instrument sau de vocea omenească este însoțită aproape imediat de notele a căror frecvență este un multiplu întreg al frecvenței notei fundamentale, note pe care le numim armonice. Luăm ca unitate nota fundamentală, frecvența ei și atunci frecvențele celorlalte armonice sunt reprezentate de numerele lor de ordine, 2, 3, 4,, 5 ... n. Intervalele care despart aceste armonice succesive sunt reprezentate de fracțiile 2/1, 3/2, 4/3, 5/4 ... care sunt de forma $\frac{n+1}{n}$ remarcată deja de Archytas din Tarent.

Dacă primul sunet armonic este Do_1, al doilea, care este în octavă (frecvența înmulțită cu 2) va fi Do_2, al treilea, despărțit de nota precedentă printr-un interval de cvintă 3/2, va fi Sol_2, al patrulea, despărțit de a treia notă printr-un interval de cvartă 4/3, va fi a doua octavă Do_3 de la Do_1. Cea de a cincea notă dă Mi_3, cea de a șasea Sol_3 totul fiind în gama majoră; această gamă armonică este gama fizicienilor.

Să vedem câteva axiome ale fizicii sunetului. Mai întâi, distincția dintre zgomot și sunet muzical. Zgomotul este o funcție sonoră *neperiodică* a timpului. Pentru a-l integra în muzică, trebuie să i se dea o periodicitate pe care o dobândim prin repetiție ritmică și prin jocul armonicelor. Orice sunet (de la tobă până la flaut) este alcătuit dintr-un zgomot și un sunet muzical; muzica folosește zgomotul pentru ritm, iar sunetul muzical pentru motivul melodic (înlănțuire a sunetelor și a intervalelor lor) și pentru armonie (acorduri de sunete simultane).

Un sunet este numit simplu sau pur atunci când vibrația care îi dă naștere este o funcție sinusoidală a timpului (ondulație regulată); este numit complex în toate celelalte cazuri. Orice sunet complex este numit muzical atunci când vibrația care îi dă naștere este o funcție periodică a timpului; în caz contrar, sunetul va fi zgomot. Așadar, sunetul simplu sau pur este întotdeauna muzical. Aici își găsește locul teorema lui Fourier:

Un sunet muzical complex poate fi socotit drept suma unui șir de sunete simple ale căror frecvențe sunt multiplii aceluiași număr numit *frecvență fundamentală*. Sunetul cel mai grav este numit fundamental sau *armonic prim*; sunetul cu frecvență dublă este numit armonic secund etc.

Înălțimea unui sunet este determinată de frecvența armonicului cel mai intens, în general sunetul fundamental, basul.

Timbrul unui sunet rezultă din alcătuirea lui armonică (frecvențe, intensități vibratorii). Senzația auditivă de înălțime totală începe pe la 40 de vibrații duble pe secundă și încetează pe la 20.000 (la copii) sau 12.000 (la bătrâni).

Orice mărime periodică având perioada T poate fi considerată ca o sumă de mărimi periodice T, T/2, T/3, T/4 ... cu frecvențele N, 2N, 3N, 4N ... zise armonice.

Mai general:

Orice curbă, de orice natură ar fi, poate fi riguros reconstituită prin suprapunerea unui număr suficient de curbe armonice (periodice) simple; dacă prima curbă nu are diviziuni periodice este socotită pe toată lungimea ca o semiperioadă a unei curbe periodice. Acest lucru își găsește analogia în ritmurile vizuale; elementul unei curbe neregulate oarecare își are ritmul potențial pe care ochiul îl extrapolează

în mod automat, făcând din el elementul unui ritm periodic, datorită indicației unei proporții. Tocmai acest element al proporției determină aici ritmul explicit sau mascat. Aceasta nu se aplică, evident, curbelor ieșite din haosul absolut asemenea traiectoriilor unei molecule în mișcare browniană. (Toate acestea își găsesc la rândul lor analogii în muzica zisă atonală.)

Axioma lui Helmholtz:

„Sunetele au cele mai multe afinități atunci când au mai multe armonice comune și când aceste armonice sunt mai intense față de celelalte". Acest lucru se întâmplă pentru două sunete atunci când raportul frecvențelor sunetelor fundamentale este cel mai simplu cu putință (exemplul intervalului de cvintă 3/2 și acordurile care îl conțin).

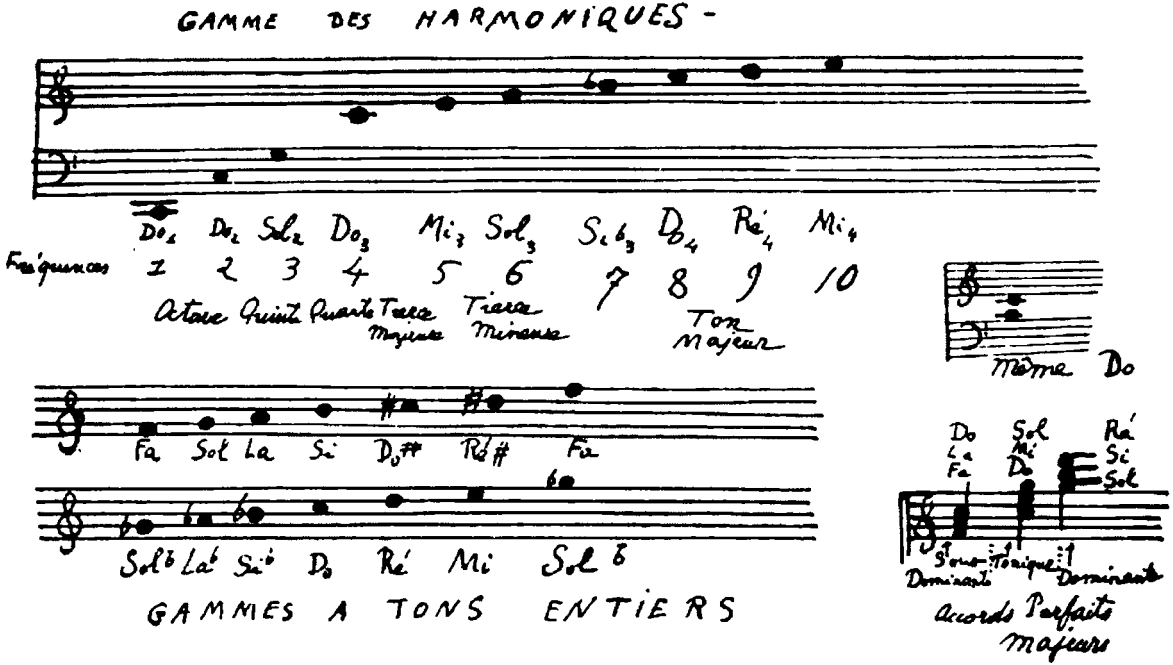
Regula raporturilor simple reiese îndată de aici:

„Dacă N și N' sunt numerele vibrațiilor pe secundă ale sunetelor fundamentale a două sunete complexe și dacă N/N' = m/n, m și n fiind numere întregi simple, atunci al n-lea armonic al primului va coincide cu al m-lea armonic al celui de al doilea, fiindcă $m \times N' = n \times N$. De asemenea, armonicele de ordinul 2 m și 2n, 3 m și 3n etc. coincid; vor exista cu atât mai multe armonice cumune cu cât m și n sunt mai mici.

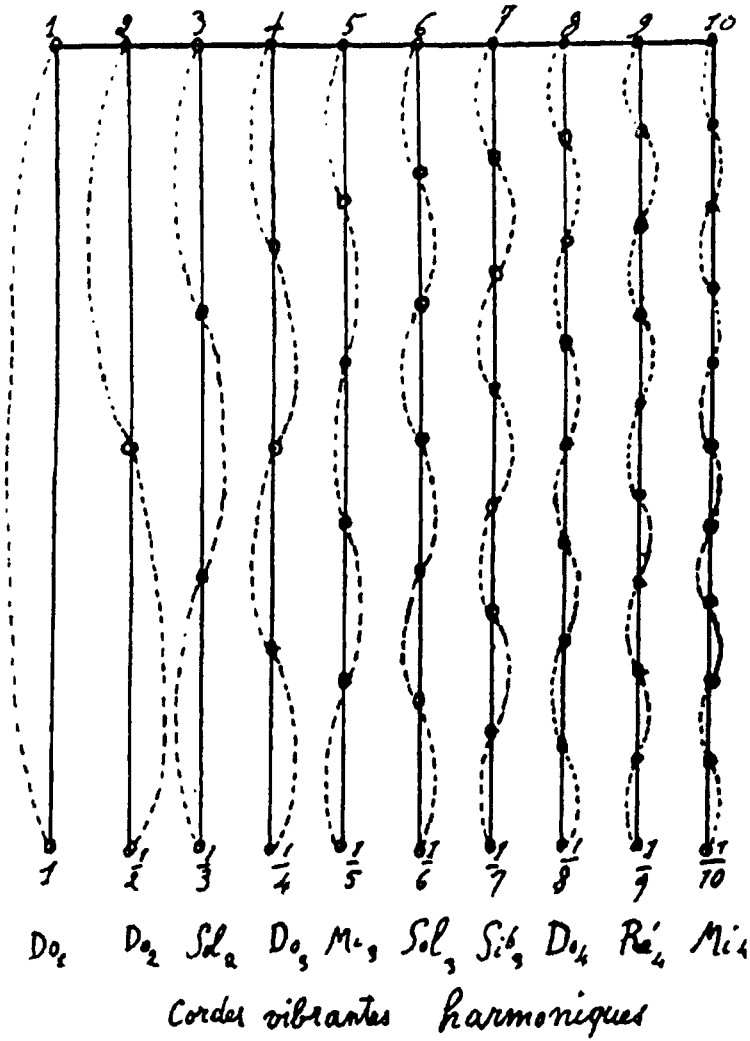
Urechea descompune orice mișcare complexă periodică într-un șir de vibrații sinusoidale care corespunde, fiecare, senzației unui sunet simplu. Acestea sunt armonicele: urechea descompune și transpune o funcție periodică oarecare în șirul lui Fourier. De reținut că anumite „creiere electronice" execută magistral aceeași operație. Urechea este înzestrată cu o harpă microscopică având 3.000 de corzi, ea are în acest fel un sonometru, rezonatoare care vibrează fiecare la maximum pentru un sunet simplu cu înălțimea determinată.

S-a izbutit, din întâmplare, cu ajutorul unor mecanisme ingenioase (ale unor păpuși care ziceau „tată" și „mamă") să se constituie voci omenești artificiale „care n-au vorbit niciodată". Am văzut, de asemenea, că orice curbă poate fi reconstituită suprapunând unde periodice; armonicele combinate reproduc sunetul fundamental.

Când două (sau mai multe) sunete pure, care sunt armonicele aceleiași note fundamentale, sunt emise în același timp, urechea adaugă această notă și mai multe dintre armonicele sale; aceste tonuri nu sunt pur subiective, ci există cu adevărat. De asemenea, atunci când se emit două note oarecare despărțite de o cvintă sau de o cvartă, se aude nota care se află în octava joasă din nota cea mai


GAMME DES HARMONIQUES -
Do1 Do2 Sol2 Do3 Mi3 Sol3 Si♭3 Do4 Ré4 Mi4
Fréquences 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Octave Quinte Quarte Tierce Majeure Tierce Mineure Ton Majeur
même Do
Fa Sol La Si Do# Ré# Fa
Sol♭ La♭ Si♭ Do Ré Mi Sol♭
GAMMES A TONS ENTIERS
Do La Fa
Sol Mi Do
Ré Si Sol
Sous-Dominante
Tonique
Dominante
Accords Parfaits majeurs

PLANȘA XXI


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 1/2 1/3 1/4 1/5 1/6 1/7 1/8 1/9 1/10
Do1 Do2 Sol2 Do3 Mi3 Sol3 Si♭3 Do4 Ré4 Mi4
Cordes vibrantes harmoniques

PLANȘA XXII

joasă; această notă, este „tonul de diferență". În general, două note auzite o evocă pe a treia, care operează sinteza lor; aceasta este nota simetrică (ca frecvență) a notei ascuțite față de nota joasă și va juca rolul de tonică instantanee.

Iată acum gama armonicelor sau a fizicienilor; întrucât cea de-a șaptea armonică riguroasă nu coincide cu o notă pură din gama majoră este corectată, înlocuindu-se această a șaptea armonică cu Si^{b} care este o aproximație. Această mișcare se repetă în cazul tuturor armonicelor, al căror număr de ordine este un multiplu de șapte (planșa XXI; în partea de jos a planșei este înfățișată gama cu tonuri întregi despre care va fi vorba mai târziu).

Planșa XXII înfățișează gama armonicelor cu corzile împărțite proporțional cu frecvențele.

A șaptea armonică naturală este ceva mai joasă decât Si^{b} (se intercalează între $La_3^{\#}$ și Si_3^{b}).

Să trecem acum de la notele simple și intervalele lor două câte două cântate simultan sau succesiv la acordurile propriu-zise de trei note (sau mai multe), care introduc elementul „proporție".

Intervalele măsurate de la nota tonică sau fundamentală până la notele succesive sunt:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Do	Re	secundă					
Do	Mi	terță (majoră, două tonuri)					

(Do Mi^{b} ar fi terța minoră, un ton și jumătate, la fel Re Fa sau La Do)

Do	Fa	cvartă (două tonuri și jumătate)
Do	Sol	cvintă (trei tonuri și jumătate)
Do	La	sextă majoră (patru tonuri și jumătate)

(Do $Sol^{\#}$ ar fi sexta minoră, patru tonuri)

Do	Si	sextă (cinci tonuri și jumătate)
Do1	Do_2	octavă

Intervalele orânduite în armonie progresivă descrescătoare sunt:

Octavă	Cvintă	Cvartă	Terță majoră	Sextă majoră	Terță minoră	Sextă minoră
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{8}$

Intervalele de cvintă, de terță majoră și de terță minoră produc acordurile cele mai armonioase, care sunt numite:

Acord major perfect	Do	Mi	Sol
	Sol	Si	Re
	Fa	La	Do
	Mi	$Sol^{\#}$	Si
Acord perfect minor	Do	Mi^{b}	Sol
	Fa	Sol^{b}	Do
	Re	Fa	La
	Mi	Sol	Si

Vedem că acordul perfect major este compus din: o terță majoră (ca Do Mi) și o terță minoră (Mi Sol) sau (este același lucru) o cvintă (Do sol) și o terță majoră (Do Mi).

Și că acordul perfect minor se compune din: o terță minoră (Do Mi^{b} sau Re Fa) și o terță majoră (Mi^{b} Sol sau Fa La), sau o cvintă (Do Sol sau Fa Do) și o terță minoră (Do Mi^{b} sau Re Fa).

Putem scoate gama majoră din trei acorduri majore perfecte ca în gama următoare:

Do Re Mi Fa Sol La Si Do Re

Tot astfel, putem scoate o gamă minoră din acordurile perfecte minore. Să ne întoarcem la șirul armonicelor lui Do... Am văzut că în timp ce primele șase armonice rămâneau în gama majoră sau a lui Zarlin, armonica șapte cădea în afara acestei game (între $La_3^{\#}$ și Si_3^{b}) și era identificată cu Si_3^{b}.

Iată șirul armonicelor după a zecea armonică:

Frecvența	11	12	14	15	16	18	20	24	25	30
	$Fa_4^{\#}$	Sol_4	Si_4^{b}	Si_4	Do_5	Re_5	Mi_5	Sol_5	$Sol_5^{\#}$	Si_5

Tot așa cum armonicele 4-5-6 (Do-Mi-Sol) furnizează acordul major, armonicele 10-12-15 (Mi-Sol-Si) furnizează acordul acordul perfect minor.

5-6-8 sau 12-15-20 furnizează acordul de terță și de sextă.

6-8-10 sau 15-20-25, acordul de cvartă și de sixtă. Dacă adăugăm acordului perfect major o terță minoră obținem acordul de *septimă* cum este Sol Si Re Fa.

Sol Si Re este numit acord major perfect cu dominantă, deoarece în gama Do, Sol este numită dominantă.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
tonică	supertonică	mediantă	subdominantă	dominantă	submediantă	sensibilă

Dacă adăugăm acordului perfect major două terțe minore, obținem acordul de nonă minoră, Sol, Si, Re, Fa, La^{b} este acordul de nonă minoră cu dominantă. (Dacă, dimpotrivă, adăugăm acordului de septimă o terță majoră obținem acordul de nonă majoră Sol Si Re Fa La). Dacă reprezentăm prin M terța majoră și prin m terța minoră, acordul de septimă cu dominanta Sol Si Re Fa este același

M m m

dacă trecem de la gama majoră la gama minoră armonică. (Dimpotrivă, acordurile de nonă cu dominantă diferă: Sol Si Re Fa La în Do major, Sol Si Re Fa La^{b} în Do minor).

Muzicologii nu sunt de acord asupra chestiunii de a ști dacă notele gamei, determinate de frecvențele și gamele asociate acestor note, au valori estetice absolute, caracteristici invariante. În ceea ce privește intervalele și acordurile răspunsul este afirmativ. Referitor la gamele care au anumite note drept tonică, muzicienii și-au spus uneori părerea. De pildă:

Pentru Beethoven tonalitatea Si^{b} minor este „Tonalitatea neagră".

Tonalitatea Re^{b} major este maiestuoasă, cea de Do major este puternică și bărbătească.

Pentru alții:

Gama în Do major inspiră bărbăție.

Gama în Re^{b} major – sonoritate deplină, euforie.

Gama Mi major – splendoare, veselie.

Gama Fa major – pace, bucurie, lumină.

Gama Fa minor – melancolie dureroasă.

Gama Fa$^{\#}$ major este strălucitoare și limpede.

Gama Sol^{b} major evocă iubirea, bogăția.

Gama Mi minor – necaz, doliu, elegie.

Gama La minor – tristețe, plânset.

Gama Si minor – sentimentalitsm.
Pentru Haydn:
Gama Fa major sugerează o idilă pastorală.
Gama Fa$^{\#}$ major este gama *transcendentă* (amintește cerul).
Gama Fa minor și Fa$^{\#}$ minor sunt tragice.
Gama Sol minor evocă gelozia.

Oricine poate compara acțiunea sugestivă sau emotivă a diferitelor game punând să i se cânte la pian aceeași melodie în 24 de game posibile (12 majore și 12 minore); contrar teoriei după care gamele ce au aceleași intervale ar trebui să fie din punct de vedere muzical identice, impresiile primite vor fi diferite de la o gamă la alta. Este adevărat că e vorba de emoții, de reacții psihologice; puriștii declară că emoția nu are ce căuta în aprecierea muzicii.

Referitor la notele individuale este, în general, admis, suntem și noi de acord, că însemnătate au raporturile de la o notă la alta, intervalele și nu valorile absolute ale notelor, și totuși practica nu este întotdeauna de acord cu logica; observăm de pildă că nota Re de la vioară atrage țânțarii și că nota Mi$^{\#}$ provoacă rutul pisicilor. După părerea unui critic muzical englez, nota Sol din octava feminină stimulează cel mai mult sentimentul iubirii la bărbat. Chinezii numeau nota *Kung* (Fa de la noi) „nota Universului". Aceste contradicții au fost explicate prin asimetria relativă a organelor acustice omenești și prin jocul subtil al timbrurilor și al armonicilor.

Să ne întoarcem la acorduri: cele două acorduri perfecte (major și minor) nu conțin decât *consonanțe* (terțe și sexte); septimele și secundele, precum și toate intervalele mărite sau micșorate cu un semiton sunt, din punct de vedere tehnic, disonanțe. Un exemplu faimos de disonanță este tritonul sau cvarta mărită (3 tonuri în loc de două și jumătate, Fa Si sau Do Fa$^{\#}$ în loc de Do Fa), *Diabolus in Musica* al înaintașilor noștri. A fost sinistrul semnal de alarmă urlat de sirene în timpul Blitzului de la Londra.

Mai există un mod de a compune o gamă care se apropie de gama majoră, folosind procedeul lui Platon din *Timaios*, cel al rebusului din „Numărul sufletului Lumii". Este vorba de gama mediilor sau a medietăților. Procedeul este înrudit cu mânuirea proporțiilor în arte în general, așa cum a fost practicată de arhitecții greci și de artiștii-matematicieni din vremea Renașterii timpurii, chiar de Palladio. Împărțim mai întâi după media aritmetică sau cea armonică (intercalăm aceste două „medietăți"), apoi tratăm în același fel intervalele

cuprinse între aceste medii tonica și octava tonicii. Obținem astfel toate intervalele din gama majoră, numai că 16/15 și 15/8 sunt înlocuite cu 17/16, 18/17, 17/9 și 16/9 (în octavă am obținut cvinta 3/2 drept medie aritmetică și cvarta 4/3 drept medie armonică; cu cvinta (1 și 3/2) obținem terța majoră 5/4 și terța minoră 6/5 etc.).

Din punct de vedere „atmosferic", cele 3 acorduri majore derivate din gama Do major, de exemplu, sunt acordul Do Mi Sol care exprimă bucuria, fericirea, seninătatea, acordul perfect cu dominantă Sol Si Re și acordul cu subdominanta Fa La Do care dă o calitate delicată pasajelor în care intervine (sunt cele 3 acorduri, care furnizează întreaga gama majoră diatonică).

Acordul perfect minor Do Mi^b Sol oscilează între melancolie și tragedie. (Amintim că există trei game minore.) Triada micșorată Do Mi^b Sol^b este acordul minor perfect coborât cu un semiton, sau acordul *furtunos*. Acest acord și triada mărită (Do, Mi $Sol^{\#}$) sunt „neliniștite"și agitate, cel dintâi în mod deosebit sugerând efecte sinistre, urletul vântului, apropierea unei furtuni, toate acestea din pricina absenței seninei cvinte perfecte; triada mărită este fantastică și „rătăcitoare" (cheia din *Ucenicul Vrăjitor*). Însă pentru a crea astfel de atmosfere este folosită îndeosebi septima micșorată (Si Re Fa La^b, 3 terțe minore).

Putem spune că acordul de septimă cu dominantă (Sol Si Re Fa) este acordul cel mai apreciat și mai important în muzică, în cele două tonalități majoră și minoră, specific mai ales cântecelor populare. Este și el, ca și acordul major perfect, *un acord al naturii*, auzit în toate tonurile naturale din cauza armonicelor sale simple (pentru acordul perfect 4, 5, 6, pentru acordul de septimă cu dominantă armonicele 4, 5, 6, 7).

Cel mai des folosit dintre acordurile de nonă este acordul de nonă cu dominantă (Sol Si Re Fa La și Sol Si Re Fa La^b), care se termină în terță majoră și respectiv minoră (M m m M și M m m m), care prezintă armonicele 4, 5, 6, 7, 9. Este o versiune bogat împodobită și mai armonioasă a acordului de septimă cu dominantă.

Privitor la muzica tonală normală, o tonică este întotdeauna subînțeleasă, însă ea se poate schimba de mai multe ori în aceeași bucată muzicală, în timpul modulațiilor. O melodie nu are sens dacă nu se află în relație cu o tonică și o gamă sau cu o succesiune de tonice și de game.

O melodie sau linie melodică determinată de raporturile dintre înălțimile notelor poate consta într-o succesiune în timp de note izolate. Dar, în general, orice notă din această linie melodică este reprezentată de un acord sau de o combinație mai mult sau mai puțin complicată de acorduri. Și în acest caz tot nota cea mai înaltă de pe partitură le poate înlocui pe celelalte sau, cu alte cuvinte, orice partitură, oricât de complicată și de bogată în note ar fi, poate fi înlocuită din punctul de vedere al liniei sale melodice de succesiunea notelor înalte. Aceasta nu se aplică firesc decât compozițiilor muzicale în care linia melodică există și nu muzicii dodecafonice etc.

E. Souriau a formulat axioma următoare privitor la linia melodică:

Pentru orice compoziție muzicală ne putem închipui o notație în spațiu, o curbă, care să dea simultan socoteală de ansamblul bucății, de ritmul și de linia sa melodică.

E. Souriau a stabilit chiar formula în geometrie analitică a acestei curbe, a cărei ordonată va fi $y = 12 \log_2 x\ 16/435$, dacă n este frecvența vibrației sonore. Numărul y trebuie să fie transpus în notația în bază 12 (în care 10 = 12); 60 reprezintă nota La din octava a șasea, cu 870 de vibrații.

Tot așa cum succesiunea în timp a notelor caracteristice ne dă linia melodică sau melodia, tot astfel acordurile de 3 sau 4 note simultane alcătuiesc armonia. Să remarcăm că pentru muzician acordul (Do Mi Sol sau altul) este realizat atât când notele sunt cântate simultan (acordul propriu-zis), cât și atunci când ele sună succesiv în arpegiu.

Întrucât în partiturile normale muzica este scrisă, în general, în 4 părți simultane, acordurile de 3 note sunt mărite la 4, repetându-se una dintre notele acordului, adesea cea mai joasă.

Cititorul a remarcat deja că putem lua orice notă din gamă drept tonică sau joasă, cu condiția ca intervalele dintre note să rămână aceleași în fiecare gamă, majoră sau respectiv minoră. Prima gamă minoră fiind gamă normală în Do:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
	T	T	t	T	T	T	t

iar prima gamă minoră gama fără alterații în La:

La	Si	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La
	T	t	T	T	t	T	T

Putem astfel forma 16 game majore (dintre care 7 diezate și 7 bemolizate) și 16 game minore prezentate în mod condensat în tabelul VI din planșa XXIII (în realitate gama în Do major și gama în La nealterată apare fiecare de două ori în tabel). În cazul celor 7 game majore diezate (cu diezi la cheie, de la 1 la 7)urcăm de fiecare dată cu un semiton (diezăm) a șaptea notă după ce am luat drept tonică cvinta gamei din linia precedentă, în cazul celor 7 game majore bemolizate (care are între 1 și 7 bemoli la cheie) coborâm de fiecare dată cu un semiton (bemolizăm) a patra notă după ce am luat drept tonică cvarta din linia precedentă. În cazul gamelor minore diezate (a căror primă linie este gama în La nealterată) luăm drept tonică cvinta din gama precedentă urcând cu un semiton (diezând) nota a doua; în cazul gamelor minore bemolizate luăm drept tonică cvarta din linia precedentă bemolizând nota a șasea.

Când folosim gamele temperate ale pianului normal nu rămân decât 12 game majore și 12 game minore, din pricina contracțiilor.

$Si = Do^{b}$	$Fa^{\#} = Sol^{b}$	$Do^{\#} = Re^{b}$	
$Re^{\#} = Mi^{b}$	$La^{\#} = Si^{b}$	$Sol^{\#} = La^{b}$	
$Mi^{\#} = Fa$	$Fa^{b} = Mi$	$Si^{\#} = Do$	$Do^{b} = Si$

În acest tablou, gamele minore sunt gamele minore clasice care nu au nici o notă „sensibilă" (ele sfârșesc cu un ton întreg). În practică, muzica modernă folosește gama minoră zisă *armonică*, în care se diezează nota a șaptea din gama clasică minoră corespunzătoare (de asemenea, tonică).

Exemplu:

gama minoră clasică Do Re Mi^{b} Fa Sol La^{b} Si^{b} Do

gama minoră armonică Do Re Mi^{b} Fa Sol La^{b} Si Do

Pe portativele unei partituri natura unei game este marcată simplu trecându-se imediat după cheie (simbolul $\mathbb{C}$ sau C: cheia Sol sau cheia Fa, care așează notele pe portativ) toate „accidentele" (alterațiile, # sau b) conținute în această gamă.

Modulația este tehnica ce permite să se treacă treptat într-o bucată de la o tonică la alta folosind, de pildă, o notă sau chiar un acord comun celor două game: ea se mai poate obține alterând (diezând sau bemolizând)o notă. În general, modulațiile se fac prin game, „înrudite", de pildă de la Do major la Sol major (de la tonică la dominantă). Fiecare gamă are cinci game înrudite; trecerea se termină, în general, printr-un acord care poate aparține și gamei următoare

TABLEAU III

GAMMES MAJEURES	GAMMES MINEURES
Do Ré Mi Fa Sol La Si Do	La Si Do Ré Mi Fa Sol La
Sol La Si Do Ré Mi Fa# Sol	Mi Fa# Sol La Si Do Ré Mi
Ré Mi Fa# Sol La Si Do# Ré	Si Do# Ré Mi Fa# Sol La Si
La - - - - - - - - - - - - - - - -	Fa# - - - - - - - - - - - - - - - -
Mi - - - - - - - - - - - - - - - -	Do# - - - - - - - - - - - - - - - -
Si - - - - - - - - - - - - - - - -	Sol# - - - - - - - - - - - - - - - -
Fa# - - - - - - - - - - - - - - - -	Ré# - - - - - - - - - - - - - - - -
Do# Ré# Mi# Fa# Sol# La# Si# Do#	La# Si# Do# Ré# Mi# Fa# Sol# La#
Do Ré Mi Fa Sol La Si Do	La Si Do Ré Mi Fa Sol La
Fa Sol La Si♭ Do Ré Mi Fa	Ré Mi Fa Sol La Si♭ Do Ré
Si♭ Do Ré Mi♭ Fa Sol La Si♭	Sol La Si♭ Do Ré Mi♭ Fa Sol
Mi♭ - - - - - - - - - - - - - - - -	Do - - - - - - - - - - - - - - - -
La♭ - - - - - - - - - - - - - - - -	Fa - - - - - - - - - - - - - - - -
Ré♭ - - - - - - - - - - - - - - - -	Si♭ - - - - - - - - - - - - - - - -
Sol♭ - - - - - - - - - - - - - - - -	Mi♭ - - - - - - - - - - - - - - - -
Do♭ Ré♭ Mi♭ Fa♭ Sol♭ La♭ Si♭ Do♭	La♭ Si♭ Do♭ Ré♭ Mi♭ Fa♭ Sol♭ La♭

De 1 à 7 altérations (# dièses ou ♭ bémols à la clef).

PLANȘA XXIII

în general, printr-un acord care poate aparține și gamei următoare (înrudită), de cele mai multe ori acordul de septimă cu dominantă.

Aceste modulații prin game înrudite sunt asemănătoare cu regula neamestecului temelor în combinația euritmică a proporțiilor în cazul artelor spațiului și se acordă, de asemenea, cu principiul analogiei al lui Thiersch. Dacă socotim linia melodică verticală, atunci acordurile simultane sunt secțiuni orizontale în bucata muzicală (în vreme ce succesiunea notelor celor mai înalte în fiecare acord dă linia melodică) care constituie armonia propriu-zisă, oglindire a combinației simultane a notelor. Atunci când aceste acorduri sunt alcătuite din notele simultane din două sau mai multe melodii, avem contrapunctul, alt aspect al simultanietății. În Evul Mediu polifonia însemna combinația simplă a două sau trei melodii armonios acordate; ea trebuia să ducă la armonie și la contrapunct. Politonalitatea caracterizează o compoziție în care, pentru a trece de la o tonalitate la alta, se folosește mișcarea simultană a mai multor tonalități distincte; în „monodie" melodia este scrisă într-o singură linie melodică predominantă; omofonia are același înțeles.

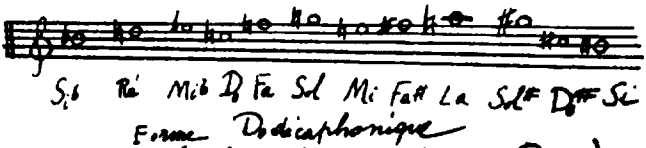
Încercând să scape de tonalitatea armonios reglată care se impusese în secolul al XIX-lea compozitorii moderni au căutat mai multe inovații. Gama cu tonuri întregi, de care s-a folosit uneori Debussy înlătură semitonurile și prin urmare asimetria, dinamismul moștenite de la gama diatonică a lui Pythagoras (a se vedea planșa XXII).

Ca urmare, caracteristicile gamelor cu tonuri întregi sunt o impresie plăcută câteodată de „melancolie" cu monotonia care, dimpotrivă, rezultă din însuși principiul său.

Revolta cea mai însemnată împotriva sistemului tonal a fost introducerea atonalității absolute de Arnold Schönberg și școala sa (Alban Berg), cu gama cu 12 note, „dodecafonică". Aici compozitorul întrebuințează 12 note din gama cromatică (temperată) aranjate arbitrar într-o ordine specifică folosită mai apoi ca bază de referință pentru o compoziție dată. Acest grup de note, care nu constituie o gamă și nu are tonică, poate fi inversat și întors în așa fel încât să dea patru forme înrudite; aceste patru forme și cele 12 transpuneri ale lor (48 cu totul) sunt forme la fel de valide din grupul de 12 note. Fiecare fază a compunerii se raportează la acest grup. Gama cromatică cu 12 tonuri obișnuite nu este o gamă dodecafonică, ci o gamă cu 7 note, „colorată" pe ici, pe colo. Acorduri normale și fragmente cu tonuri întregi sunt amestecate câteodată cu substratul atonal; în

general, rezultatul are un efect neplăcut asupra urechilor auditorilor obișnuiți cu tonalitatea, impresia fiind de mișcare browniană haotică, de sunete lipsite de ritm și de melodie, de succesiune de zgomote. Dar poate că ar fi prematur să condamnăm în bloc sistemul atonal, cu toate că pare să aibă ca rezultat mai degrabă exerciții matematice arbitrare decât compoziții muzicale. Să ne amintim că Wagner a fost huiduit, că Richard Strauss și Debussy au fost socotiți disonanți. Iar muzica chinezească, cea care farmecă 450.000.000 de perechi de urechi, ni se pare tot atât de cacofonică precum anumite opere atonale.

Muzicienii care nu au repudiat legile tonalității admit totuși că gamele clasice au nevoie să fie reînnoite; Florent Schmitt de pildă, este de părere că trebuie introdusă terța de ton „înviorând cu șase sunete pure biata noastră gamă sleită, vlăguită... ceea ce ar face să țâșnească sistemul nostru armonic în jerbe răcoritoare".



Ivan Semenov recomandă și el introducerea terței de ton. „Forma" dodecafonică nu este o gamă, ci o suită primară ale cărei inversiuni și alte mânuiri sunt suite secundare. Ele sunt, în general, cu neputință de cântat sau de reținut... Dau aici un exemplu dintr-o suită dodecafonică din opera *Lulu* de Alban Berg.

Cu aceasta închei capitolul despre număr în muzică; sper că nu am pus la grea încercare răbdarea matematicienilor vorbind prea mult despre muzică și pe cea a muzicienilor căutând să dovedesc temeiul afirmației lui Leibniz, nădăjduiesc în orice caz că, mergând pe această cale limitrofă celor două domenii, numărul și muzica, tot zâmbetul din depărtări al lui Pythagoras este cel care ne călăuzește cuvintele:

„El însuși a spus-o"

ale neofiților îmbrăcați în togă de in alb din Marea Confrerie.

Unii cititori se vor întreba dacă „Numărul de aur" atât de vădit în artele vizuale, apare sau nu în muzică; nu l-am găsit în acest capitol, în afară de rolul dominant al cvintei și de apariția intermitentă a fracțiilor fibonacciene în intervalele gamei. Totuși, anumite compoziții ale lui Beethoven și ale lui Mozart au, se pare, numărul măsurilor tăiate în segmente care reproduc în timp proporția din Secțiunea de Aur. Iar proporția geometrică, care nu se înfățișează cu limpezime în gama diatonică și în gamele majoră și minoră obișnuite, domnește, dimpotrivă, cu autoritate în gama temperată, producând, după cum am văzut, semitonuri după o proporție geometrică cu rația $\sqrt[12]{2}$ care împarte octava în 12 părți egale.

În legătură cu aceasta, un filosof, estetician și muzicolog elvețian, M. Denéréaz de la Universitatea din Lausanne, examinând mai îndeaproape diviziunile proporționale ale gamei temperate, a remarcat că toate notele unei game cu temperare egală se puteau obține (începând cu acordul perfect Do Mi Sol) prin folosirea Secțiunii de Aur sau, după cum singur spune, „că temperarea egală introduce Secțiunea de Aur în proporțiile gamei". Într-adevăr, a tempera notele Mi și Sol pe o coardă Do lungă de 1000 mm, de pildă, înseamnă (plecând de la gama majoră în care părților alicote 4/5 și 2/3 le corespund corzile Mi 800 și sol 666,6...) să deplasezi punctele care marchează aceste note în așa fel încât complementele corzilor Mi și Sol să devină, în loc de 200 și 333,3 ... 206 și 333. Într-adevăr lungimea corzii Mi, raportată la Do, va fi inversul raportului frecvențelor, inversul terței majore temperate 1,259 sau 1/1,259 = 0,794 care dă exact 206 pentru coarda complementară; lungimea corzii Sol temperată este dată de inversul cvintei temperate 1,498 sau 1/1,498 = 0,667 ceea ce înseamnă 667 pentru coarda sol și 333 pentru complement. Înmulțind cele două complemente 206 și 333 cu 3 obținem 618 și 999, aproximații riguroase de $\frac{1}{\Phi}$, și de 1. M.

Denéréaz își comentează descoperirea cu acest cuvinte:

„Dacă acordul perfect Do Mi Sol mi se pare armonios în mod spontan, aceasta nu se întâmplă din pricina unui raport simplu între segmentele de coardă care îl exprimă, ci pentru că terța minoră Mi Sol este pentru terța majoră Do Mi cum este aceasta față de

cvinta Sol, Do Sol" (Chiar definiția proporției din Secțiunea de Aur). M. Denéréaz arată mai departe, luând notele Do_1, Fa_1, Sol_1, Do_2 ca repere fixe, că se poate deduce de aici întreaga gamă temperată folosindu-ne doar de Secțiunea de Aur aplicată la lungimile corzilor (de la 1000 la 500) în octavă sau la cele ale complementelor lor la 1000. Obținem astfel cele 7 Secțiuni de Aur Do Mi Sol, Do Fa La Re Fa Sol, Fa Sol Si (înmulțind cu 0,618 intervalele Re Sol și Fa Si), Re Fa Si, Re Sol Si, Fa La Do. Diezii confundați în general cu bemolii, întrucât este vorba de o gamă cu temperare egală, se intercalează în medietăți geometrice se furnizează șiruri de aur și reciprocități adiționale. Toate acestea, spune Denéréaz, oferă o nouă interpretare a unității estetice a gamei pe care o lămuresc atât de puțin raporturile eterogene luate în mod obișnuit în considerare.

GAMME TEMPERÉE NORMALE ET GAMME D'OR

	Do$_1$	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do$_2$
(a)	1000	946	891	841	794	750	707,2	667,5	630	595	561	530	500
(b)	1000	960	894,8	833,3	794	750	717	666,6	628	596	583	532	500

(a) Longueurs des cordes dans la gamme tempérée normale
(b) " " " " " gamme d'or

Calculând corzile gamei temperate prin aplicarea riguroasă a Secțiunii de Aur în conformitate cu indicațiile de mai sus obținem ceea ce Denéréaz numește „Gama de Aur". Ea se deosebește foarte puțin de gama temperată uzuală.

Lungimile comparate ale corzilor

Rândul al doilea reprezintă lungimile corzilor în gama temperată uzuală, rândul al treilea lungimile corespunzătoare din „gama de Aur".

Putem constitui Gama de Aur plecând de la frecvențele celor patru note fixe: $Do_1 = 1$ $Fa_1 = 1{,}333$ $Sol_1 = 1{,}500$ $Do_2 = 2^3$.

Ar fi fără îndoială interesant să acordăm un pian după Gama de Aur a lui Denéréaz pentru a-i compara sonoritățile cu cele ale gamei temperate uzuale și pentru a verifica dacă jocul subtil al propozițiilor de aur introduse de teorie se traduce în câștiguri armonice, ecouri ale „Numărului sufletului lumii".

Îmi exprim încă o dată speranța că exemplele și considerațiile cuprinse în acest capitol au confirmat temeiul butadei lui Leibniz și al celei a lui Francis Warrain (după care muzica este pentru timp ceea ce geometria este pentru spațiu, cu alte cuvinte, desenul în timp). Ba chiar putem îndrăzni să spunem, împreună cu un anumit grup de esteticieni muzicologi, că „sunetul muzical califică nemijlocit însă esența duratei și ne îngăduie câteodată să *trăim spiritual Numărul*".

NOTE

[1] Intervalul dintre două note oarecare, vecine sau nu, din aceeași gamă, *Fa Sol* de pildă, are drept măsură fracția, în acest caz 9/8, cu care trebuie înmulțit numărul de perioade (vibrații complete) ale sunetului *Fa* pentru a obține sunetul *Sol* (dacă numărul de perioade ale sunetului *Do* este luat ca unitate, vom vedea mai departe că numărul perioadelor lui *Fa* este 4/3, cel al sunetului *Sol* 3/2; 9/8 x 4/3 = 3/2). Acest interval *Fa–Sol* sau 9/8 se numește ton întreg. Urechea atribuie intervalului muzical astfel definit (raportul frecvențelor a două sunete) un caracter care nu depinde de poziția celor două sunete pe scara muzicală.

[2] Intervalul este raportul frecvențelor sau al lungimilor corzilor vibratorii (aceste elemente sunt invers proporționale) dintre două note. O notă a este în *cvinta* unei note b (a și b sunt frecvențe) atunci când a x 3/2 = b.

[3] Găsim atunci proporțiile:

Do	Re	Fa	1,000	1,127	1,333
Re	Mi	Sol	1,127	1,204	1,500
Mi	Sol	Si	1,264	1,500	1,882
Do	Mi	La	1,000	1,264	1,691
Sol	La	Do_2	1,500	1,691	2,000
Re	Fa	La	1,127	1,333	1,667

Toate aceste șiruri sunt de tipul $\frac{c-a}{c-b} = \frac{c-b}{b-a} = \Phi$ din care termenul necunoscut (b sau c) se obține prin $b = c - \frac{c-a}{\Phi}$ sau $c = b\,\Phi^2 - a\,\Phi$ cu $\Phi^2 = 2{,}618$, $\frac{1}{\Phi} 0{,}618$.

CAPITOLUL XVIII

NUMĂRUL ȘI CHIMIA - CHIMIA ANORGANICĂ ȘI CHIMIA ORGANICĂ - TABELUL LUI MENDELEEV ȘI TABELUL LUI MENDEL - TEORIA LUI SCHRŒDINGER DESPRE MUTAȚII - NUMĂRUL ȘI UNDELE

Matematica este poarta și cheia științelor naturale, alfabetul filosofiei.

Francis BACON

Am studiat în capitolele precedente „Numărul în sine", pur sau științific, cu reprezentanții săi excentrici, numerele imaginare și transfinite; am văzut în treacăt rolul său în frumusețea operelor de artă și a formelor naturale în care apare, în general, sub forma proporției, adică a analogiei, precum și rolul său în poezie, în muzică.

Analiza combinatorie întemeiată pe Triunghiul lui Pascal și pe numerele figurate ne-a făcut să pătrundem în lumile cu 4 sau n dimensiuni, am enunțat în mecanica generală și în fizica matematică legea fizică și chiar fizico-chimică cea mai generală, legea absolută (pentru sistemele fizico-chimice închise și care nu conțin organisme vii), lege deseori numită „a doua lege a termodinamicii" sau principiul lui Carnot-Clausius, numit și mai general „principiul minimei acțiuni". Ne rămâne să explorăm în treacăt un domeniu în care numărul ocupă, de asemenea, un loc de prim plan, chimia, născută și ea în vechiul „pământ negru" al Egiptului, care, după ce a luat parte la visările simbolice ale alchimiștilor, a devenit o știință tot atât de riguroasă ca mecanica, și în care aritmetica și geometria ne ajută să alcătuim edificiile stereo-chimiei și să pătrundem în inima atomului.

De când ipoteza atomică a materiei a fost formulată de greci și de Lucrețiu (ipoteza că materia este în ultimă instanță alcătuită din particule indivizibile și indestructibile), părea probabil că într-o bună zi chimia va deveni o știință precisă și va căpăta un aspect numeric, în care grupuri sau șiruri de numere întregi vor juca un anume rol. Teoria cinetică a gazelor în care căldura era interpretată

ca o formă de energie rezultând din mișcările oscilatorii ultrarapide ale atomilor și moleculelor în veșnică vibrație, căldura sau mai degrabă temperatura, fiind proporțională cu frecvența acestor vibrații, a introdus nu numai numerele, ci și „numerele mari" ale concepțiilor „statistice".

Fizica și chimia moderne confirmaseră în parte ipotezele atomice; se descoperiseră într-adevăr particule foarte mici, dar finite, indivizibile și indestructibile în aparență, cu masa invariabilă, după cum se credea, care caracterizau pe fiecare din cele 92 de elemente simple clasificate datorită tabelului lui Mendeleev. Cele mai multe dintre aceste corpuri simple aveau, în general, ca particulă caracteristică atomul corespunzător, însă uneori această particulă era compusă din doi atomi, era o moleculă (ca în cazul hidrogenului și al oxigenului).

În tabelul periodic al lui Mendeleev corpurile simple sunt clasate după ceea ce numim „numerele lor atomice" de la 1 la 92; aceste numere nu sunt exact proporționale cu greutățile atomice (unitatea fiind aici a 16-a parte din greutatea atomului de oxigen, care are, așadar, greutatea atomică 16), însă cresc paralel cu acesta. Greutățile atomice, dintr-un motiv pe care-l vom vedea mai departe, nu sunt, în general, numere întregi. Proût și A. Strindberg (dramaturgul) au postulat că atomul de hidrogen este elementul de bază care permite reconstituirea tuturor corpurilor zise simple (și alchimiștii au crezut în unitatea materiei și în posibilitatea transmutațiilor). Proût și Strindberg întrevăzuseră adevărul, însă felul în care atomii celor 92 de elemente simple erau legați de atomul de hidrogen era ceva mai subtil decât o simplă adunare de atomi identici; lumea „subatomică" sau infraatomică intră în joc și, pentru a înțelege structura materiei cândva indivizibile și indestructibile, trebuia să pătrunzi în interiorul atomului, chiar al celui dintâi, al celui mai ușor, cel de hidrogen.

Descrierea atomului acceptată de fizico-chimia de astăzi este următoarea:

Fiecare atom al unui element simplu este alcătuit dintr-un nucleu și dintr-un strat exterior de învelișuri ideale concentrice care conțin orbitele electronilor. Aceste straturi exterioare pot conține de la un electron (o orbită) la până la 92 de electroni, hidrogenul nu are decât un electron exterior, heliul doi. Primul înveliș din stratul exterior nu conține niciodată mai mult de doi electroni, al doilea mai mult de opt, al treilea mai mult de 18, al patrulea mai mult de 32 de electroni

(uraniul are 92 de electroni ale căror orbite ocupă 7 învelișuri concentrice, dintre care doar primele 4 sunt naturale; cu 2, 8, 18, 32 electroni aceste numere se conformează formulei $2n^2$, în care n este numărul de ordine al învelișului de la 1 la 4).

Nucleul conține un număr de protoni (particule cu sarcină electrică pozitivă egală în valoare absolută cu sarcina negativă a electronului, dar cu o masă de 1840 de ori mai mare decât aceea a electronului) egal cu cel al electronilor de pe învelișul exterior. Întrucât sarcinile pozitive se compensează, atomul este din punct de vedere electric neutru. În plus, nucleul conține un număr de neutroni fără sarcină electrică, însă cu masa egală cu cea a protonului (mai exact, dacă masa electronului este 0,0005, cea a protonului este 1,0076, iar cea a neutronului 1,0089). Ceea ce numim numărul atomic este egal cu numărul de electroni de pe învelișurile exterioare care gravitează în jurul nucleului; suma maselor protonilor din nucleu dă *greutatea* atomică.

De exemplu, oxigenul are numărul atomic 8; aluminiul 13, greutatea atomică 27,1; aurul are numărul atomic 79, greutatea atomică 197,2; uraniul are numărul atomic 92 (este ultimul corp simplu „natural"), greutatea atomică 238,5.

Constatarea, surprinzătoare la prima vedere, că greutățile atomice nu sunt în general numere întregi, provine din faptul că cea mai mare parte a elementelor au mai multe feluri de atomi cu greutăți atomice întregi ușor diferite numiți izotopi (cu același număr atomic); diferențele provin din faptul că, deși au toți același număr de electroni exteriori și de protoni nucleari, numărul neutronilor nucleari diferă, fapt care duce la existența unor fluctuații ale diferitelor greutăți atomice; elementul compus, deși element *pur* în teorie (cuprinzând numai atomi ai aceluiași element) are greutatea atomică egală cu media proporțională a greutăților atomice ale izotopilor care îl compun. Se știe de pildă că uraniul, cu numărul atomic 92 și greutatea atomică 238,5, are ca izotopi principali greutățile atomice 238 (92 de protoni + 146 de neutroni în nucleu) și 235 (92 de protoni + 143 de neutroni). Argonul, care are numărul atomic 18, are 2 izotopi cu greutățile atomice 36 și 40. Primul are 18 neutroni nucleari, al doilea 22, însă, din pricina proporțiilor diferite, greutatea atomică este 39,9.

Tabelul din planșa XXIV va ușura înțelegerea dispunerilor succesive ale atomilor în Tabelul lui Mendeleev.

Vedem că îndată ce al doilea înveliș exterior a captat 8 electroni, învelișul următor începe cu un electron. Atomii cu 8 și 18 electroni în învelișul exterior sunt saturați (2×2^2, 2×3^2) și furnizează în special gazele inerte, neonul și argonul; în acest șir care are ca strămoș heliul cu 2 electroni exteriori urmează și kriptonul (36 de electroni) și xenonul ($54 = 2 \times 3^3$) cu numerele, de asemenea, satisfăcute, dacă nu saturate.

În tabelul din planșa XXIV vedem că atomii cu același caracter, care au aceleași simetrii sau asimetrii în dispunerea electronilor pe învelișuri, sunt grupați aproximativ în coloane verticale ale căror elemente au aceleași proprietăți generale. Este cazul gazelor inerte pomenite mai înainte care au o mare stabilitate și nici o tendință de a se combina cu alte elemente. Elementele care nu au decât un electron pe învelișul exterior sunt instabile și au tendința de a se combina cu un alt element care „vrea" să acapareze acest electron foarte mobil. În general, numerele pare tind către stabilitate, numerele impare către instabilitate sau cel puțin au tendința de a se alia cu un alt element. Corpurile ușoare care nu au decât 2 sau 3 învelișuri de electroni au tot timpul tendința de a-și completa învelișul exterior până la 8 electroni; pierzând sau captând numărul de electroni suficienți. Clorul, de pildă, care are 7 electroni exteriori și sodiul (cu 1 electron exterior) se combină pentru a forma sarea sau clorura de sodiu, Na Cl (planșa XXV).

Atomul de sodiu își pierde electronul exterior și capătă o sarcină pozitivă, devine un ion de sodiu. În același timp, atomul de clor capătă un electron (își completează învelișul exterior de 8 electroni) și dobândește o sarcină negativă, devine un ion negativ. Acești 2 ioni cu sarcină contrară se combină într-o moleculă, un cristal elementar, de sare, în care atomii ocupă la rândul lor vârfurile și centrul unui cub, precum și vârfurile cuboectaedrului înscris în cub formând astfel cristalul clasic din sistemul cuboctaedric (planșa VI cap. VI).

Am văzut într-un alt capitol că rețeaua cuboctaedrică, care combină simetriile sistemelor cubic și hexagonal, este cea care dă repartiția cea mai izotopă de puncte în spațiu. Aurul, argintul, arama, aluminiul au, în general, atomii dispuși conform cu această rețea cuboctaedrică. Tendința aceasta cu 2 atomi sau molecule de a se combina, câștigând și pierzând un electron, aparține un fenomen numit electrovalență sau afinitate electronică.

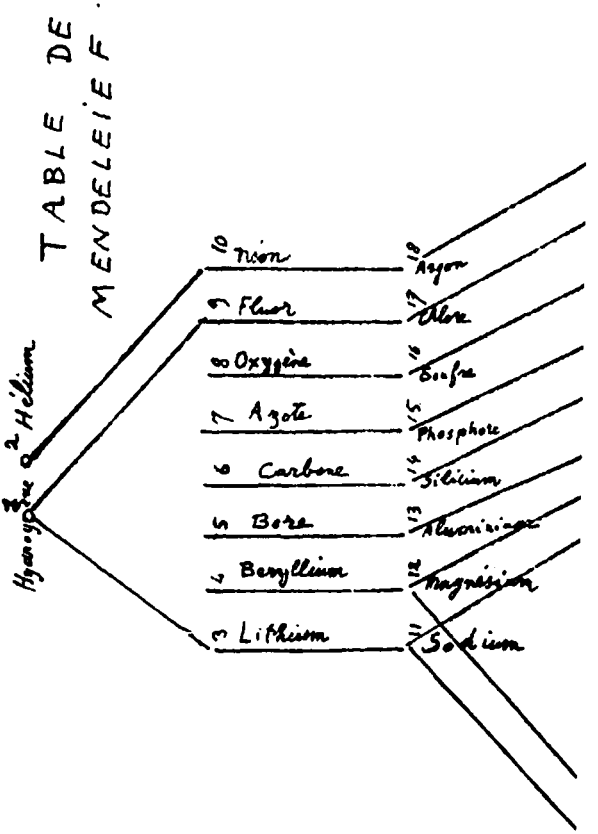
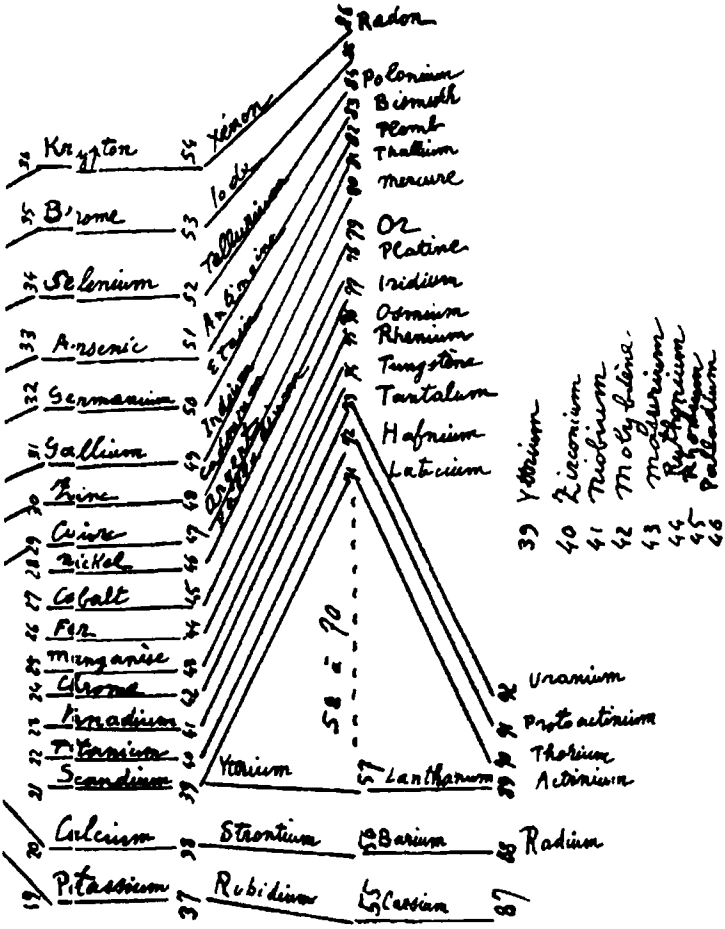


TABLE DE MENDELEIEF
Hydrogène 1
2 Hélium
9 Fluor
10 Néon
8 Oxygène
7 Azote
6 Carbone
5 Bore
4 Beryllium
3 Lithium
18 Argon
17 Chlore
16 Soufre
15 Phosphore
14 Silicium
13 Aluminium
12 Magnésium
11 Sodium


Radon
Polonium
Bismuth
Plomb
Thallium
Mercure
Or
Platine
Iridium
Osmium
Rhenium
Tungstène
Tantalum
Hafnium
Lanthane
Yttrium
Zirconium
Niobium
Molybdène
Ruthenium
Rhodium
Palladium
Krypton
Brome
Sélenium
Arsenic
Germanium
Gallium
Zinc
Cuivre
Nickel
Cobalt
Fer
Manganèse
Chrome
Vanadium
Titane
Scandium
Calcium
Potassium
Strontium
Rubidium
Baryum
Césium
Radium
Uranium
Protactinium
Thorium
Actinium
Yttrium
Lanthanum
Sa i Po

PLANȘA XXVI

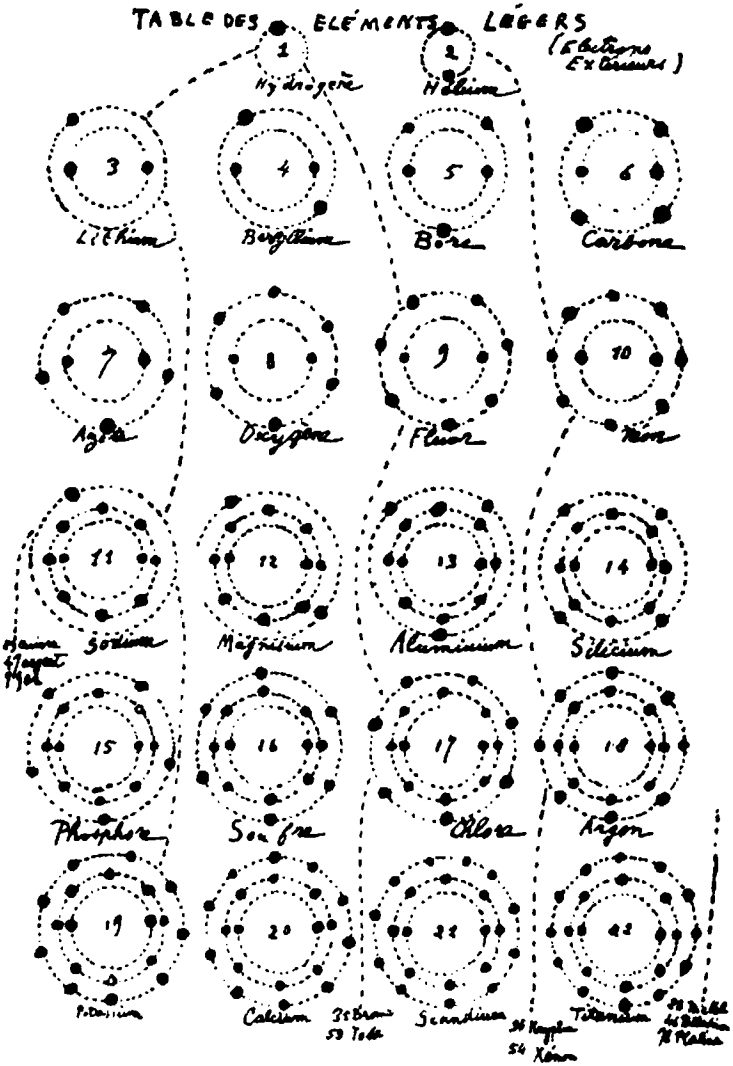
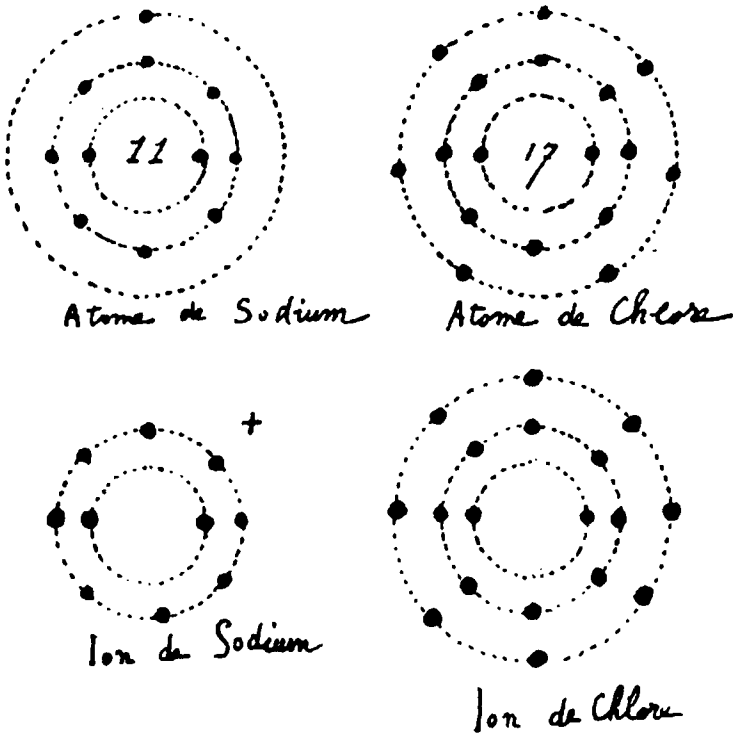


TABLE DES ELÉMENTS LÉGERS
(6 électrons Ex Cœurs)
1
Hydrogène
2
Hélium
3
Lithium
4
Beryllium
5
Bore
6
Carbone
7
Azote
8
Oxygène
9
Fluor
10
Néon
11
Sodium
12
Magnésium
13
Aluminium
14
Silicium
15
Phosphore
16
Soufre
17
Chlore
18
Argon
19
Potassium
20
Calcium
21
Scandium
42
Tellurium

PLANȘA XXIV



PLANȘA XXV

Iată câteva detalii complementare despre calitatea periodicității Tabelului lui Mendeleev: coloana care are în frunte atomul de hidrogen (N = 1) și care continuă cu sodiul (N = 11) și potasiul (N = 19) are o a doua ramificație (începând cu sodiul), care cuprinde un șir de metale: cupru (29), argint (47), aur (79); o altă semicoloană independentă cu metale „nobile" înrudite dă: nichel (28), paladiu (46), platină (78); o alta: beriliu (4), magneziu (12), zinc (30), cadmiu (48), mercur (80). Un alt rând: carbon (6), siliciu (14), germaniu (32), staniu (50), plumb (82). Coloana elementelor cu 7 electroni pe învelișul exterior (deci dornică să absoarbă al optulea electron) ne promite elemente instabile: hidrogenul (35), fluorul (9) clorul (17), bromul (35), iodul (53). Am citat deja cloana gazelor inerte (cu înve-

lișul exterior saturat): heliul (2), neonul (10), argonul (18), criptonul (36), xenonul (54). Această lege a octavelor nu este, după cum se vede, decât aproximativă, însă analogiile pe care le pune în lumină sunt totuși folositoare, iar dispunerea numerică a electronilor pe învelișuri explică până la un anume punct cauzele (planșa XXVI, tabelul 6).

A fost explorată până și structura internă a nucleelor, structură care pare și ea alcătuită din învelișuri pe care particulele, protoni și neutroni, se învârtesc în jurul centrului pe niște orbite fixate de legile mecanicii cuantice (mai corect, orbitele sunt „distribuții de probabilitate"). Și aici (pe orbitele intranucleare), anumite grupări par mai stabile decât celelalte. De pildă, până la calciu (20), elementele care conțin numere pare egale de protoni și de neutroni, heliul (2), beriliul (4), oxigenul (8), ... calciul (20) sunt mai stabile decât celelalte. 20 pare un număr foarte favorabil stabilității, ceea ce pare să sugereze un înveliș saturat cu 20 de protoni; același lucru pentru 50 (staniu) și 82 (plumb) care, asemeni calciului, oferă un mare număr de izotopi (numere variabile de neutroni). De fapt, din cauza acestei particularități, savanții „intranucleari" au dat grupurilor 2, 8, 20, 50, 82 denumirile neașteptate de „numere magice". Stabilitatea nucleelor constituite dintr-un număr „magic" de protoni sau de neutroni poate fi perturbată de prezența unei particule suplimentare, necuplate (care se prezintă întotdeauna cu un număr impar de particule nucleare). Când numărul de neutroni și de protoni este par, „spinii" lor (rotire în jurul axei sau în jurul centrului nuclear) se compensează, însă atunci când o particulă impară (necuplată) există, ansamblul nucleului pare să aibă spinul acestei particule. Dacă este vorba de un neutron, proprietățile atomului nu sunt influențate în nici un fel, dar dacă particula necuplată este, dimpotrivă, un proton cu sarcină electrică efectivă, atunci rotirea acestei sarcini electrice (spinul) va produce un cuplu magnetic. Rolul acesta al spinului în proprietățile magnetice ale anumitor elemente nu a fost încă studiat în profunzime și nici rolul său posibil în producerea prin autoinducție a inerției totale (masa) sau parțiale a electronului.

În toate cele spuse până acum pentru a simplifica am socotit, că masa protonului și aceea a neutronului sunt egale și că cea a electronului este practic egală cu zero. Aceasta nu este decât o aproximație; în realitate, masa protonului, m_p, este 1,00076, cea a neutronului m_n este 1,0089, cea a electronului m_e este 0,0005. Așadar:

$$m_p + m_e = 1{,}0081 < m_n$$

(dacă socotim greutatea atomică a oxigenului egală cu 16).

Aceste mici diferențe nevinovate în aparență au consecințe incalculabile... prea bine calculate.

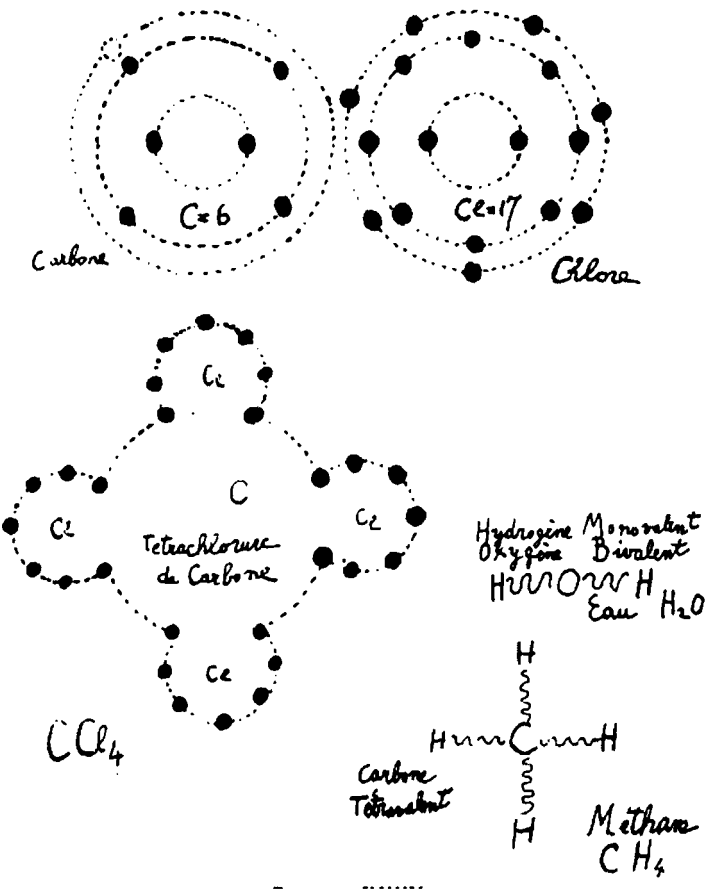
Suma maselor protonului și a neutronului este 2,00165 însă atunci când se unesc pentru a forma un deuteron (greutate atomică 2, nucleu al hidrogenului greu, izotop al hidrogenului obișnuit) masa acestuia nu este decât 2,00142. Diferența este transformată în 2.200.000 de electron-volți de energie. În același fel, greutățile (sau masele) particulelor care alcătuiesc nucleul de heliu dau un total de 4,0322, în timp ce masa atomului de heliu nu este decât 4,0027. Dispariția acestei mase mici reprezintă o eliberare de energie de 28.000.000 de electron volți. Acesta este principiul bombei cu hidrogen și al energiei radiației solare.

Atomii anumitor elemente, în loc să fie izolați, se grupează doi câte doi în moleculele care sunt adevăratele particule elementare ale acestor corpuri simple; este cazul hidrogenului, al oxigenului și al clorului; atomii izolați ai acestor corpuri pot intra doar în combinări cu alte corpuri. Heliul, neonul, argonul, carbonul etc. sunt monoatomice.

Electrovalența, sau dobândirea sau pierderea unui electron atras sau expulzat de un atom nu este singura modalitate de combinare chimică. Mai avem și covalența atunci când o pereche de electroni face parte din doi atomi în același timp, fiecare furnizând câte unul precum și valența coordonată atunci când cei doi electroni fac parte în același timp din doi atomi provin de la același atom.

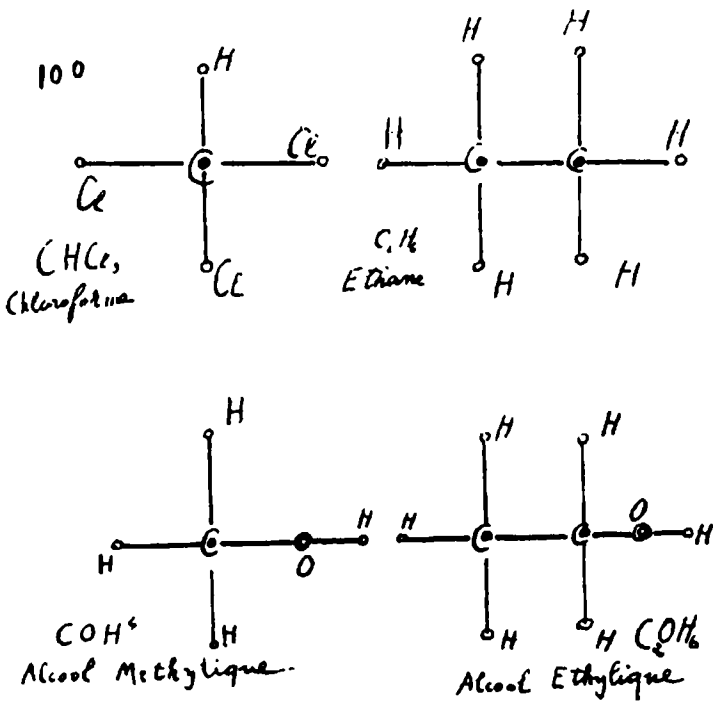
Un exemplu de covalență: tetraclorura de carbon (folosită în stingătoarele de incendii) are un atom de carbon, C, și 4 de clor, Cl. Carbonul, care are 4 electroni pe învelișul exterior, ar vrea să și completeze până la 8. Clorul are 7 electroni pe învelișul exterior și-i ar vrea și el să și-i completeze până la 8. Atunci, carbonul va da cu împrumut pe fiecare dintre electronii săi exteriori câte unui atom de clor și reciproc (atunci fiecare atom de clor va împărți doi electroni cu atomul de carbon). fig.

Vedem că elementul carbon este tetravalent, se poate combina cu alți patru atomi, ca în CH_4 și CCl_4. hidrogenul și clorul sunt monovalenți (se combină cu un alt atom), oxigenul este bivalent, azotul trivalent. Carbonul are și proprietatea unică de a forma lanțuri și inele.



PLANȘA XXVII

În plus, carbonul are proprietatea că după ce s-a combinat cu 4 atomi de hidrogen, de exemplu CH_4, într-o astfel de moleculă un atom oarecare de hidrogen poate fi înlocuit de un atom dintr-un alt corp monovalent. În același fel un atom de clor din cloroform $CHCl_3$ a fost înlocuit de un atom de hidrogen (planșele XXVIII și XXVII).



PLANȘA XXVIII

În etan (C_2H_6), un atom de hidrogen a fost înlocuit de un grup CH_3 nesaturat care mai avea o legătură liberă (planșa XXVIII).

Carbonul are deci posibilitatea unei legături covalente, care explică rolul său de primă însemnătate în chimia organică și în cea anorganică.

Numim carbohidrați combinările organice compuse numai din carbon, hidrogen și oxigen (incluzând zaharurile, amidonul, rășinile produse de fotosinteza plantelor).

Numim hidrocarburi combinările de carbon și de hidrogen (uleiuri minerale).

Benzolul (C_6H_6) este punctul de plecare al șirului inelar, metanul (CH_4) al șirului catenar (planșa XXIX).

Moleculele de hidrocarburi cu bază inelară hexagonală formează „substanțele aromate", cele cu bază catenară substanțele „alifatice" (uleiuri și grăsimi). Diamantul (carbon cristalizat) formează o rețea inelară și catenară totodată, cu simetrie cuboctaedrică.

Doi carbohidrați importanți:

Alcoolul metilic sau alcoolul de lemn (lemn sau rumeguș distilat) se fabrică sintetic cu oxid de carbon CO și hidrogen H. Formula lui este COH_4 (planșa XXVIII). Este o otravă.

Alcoolul etilic, C_2OH_6, alcool din cereale sau din vinuri. (Pentru a-l „denatura" se adaugă 10% alcool metilic. Planșa XXVIII).

Zaharurile sunt, după cum se știe, rude cu alcooli.

Zaharoză (zahăr din sfeclă) lactoză
Zahăr de trestie și maltoză } $C_{12}H_{22}O_{11}$

Zahăr de struguri, dextroză, glucoză } $(C_6H_{12}O_6$

Iată formulele câtorva combinări chimice importante pe care le întâlnim în viața de zi cu zi; să notăm că N^1 este simbolul azotului (nitrogen) de care nu am pomenit până acum. Apare ca element cu tendințe combinatorii (5 electroni pe învelișul exterior) în fruntea coloanei suspecte fosfor, arsenic, antimoniu, dar se arată a fi elementul cardinal în proteine, substanțe esențiale în alimentația omului.

Iată șirul catenar derivat din metan:

Metan	CH_4	gaze
Etan	C_2H_6	
Propan	C_3H_8	
Butan	C_5H_8	
Pentan	C_5H_{12}	benzine lichide
...		
Octan	C_8H_{18}	
...		
Decan	$C_{10}H_{22}$	
	C_9H_{20}	petroluri lampante lichide
	$C_{16}H_{34}$	
	$C_{21}H_{44}$	solide (parafine)
	$C_{27}H_{54}$	

(Vezi planșa XXIX.)

Din C4 H8 (butanul) derivă cauciucurile sintetice.

Alcaloizii alcătuiesc o grupare de substanțe organice de origine vegetală care conțin cel puțin un atom de azot (N) într-o structură inelară.

Cocaina	$C_{17}H_{21}O_4N$
Codeina	$C_{18}H_{21}O_3N$
Morfina	$C_{17}H_{19}O_3N$
Nicotina	$C_{10}H_{14}N_2$
Chinina	$C_{20}H_{24}O_2N_2$
Stricnina	$C_{21}H_{22}O_2N_2$
Cafeina, teina	$C_8H_{10}O_2N_4$
Cloroform	$CHCl_3$
Anilina	$C_6H_5NH_2$
Gazul ilariant (protoxidul de azot)	N_2O

Eterul sulfuric (nu conține sulf, dar în prepararea lui intră acidul sulfuric SO_4) $(C_2H_5)_2O$). Clorul, element chimic avid (7 electroni pe învelișul exterior) și deseori veninos, intră în formula multor gaze toxice, precum fosgenul $COCl_2$, gazul mușstar $SC_4H_8Cl_{12}$. Cianidul de hidrogen sau acid prusic, otravă puternică, are formula HCN.

Cianogenul (altă otravă) C_2N_2.

Celuloza (se poate transforma în glucoză prin „hidroliză", $(C_6H_{10}O_5)n$.)

Oxidul de carbon, toxic: CO.

Acidul carbonic CO_2 sau H_2CO_3 când este amestecat cu apă.

Sulfura de hidrogen H_2S (ouă clocite).

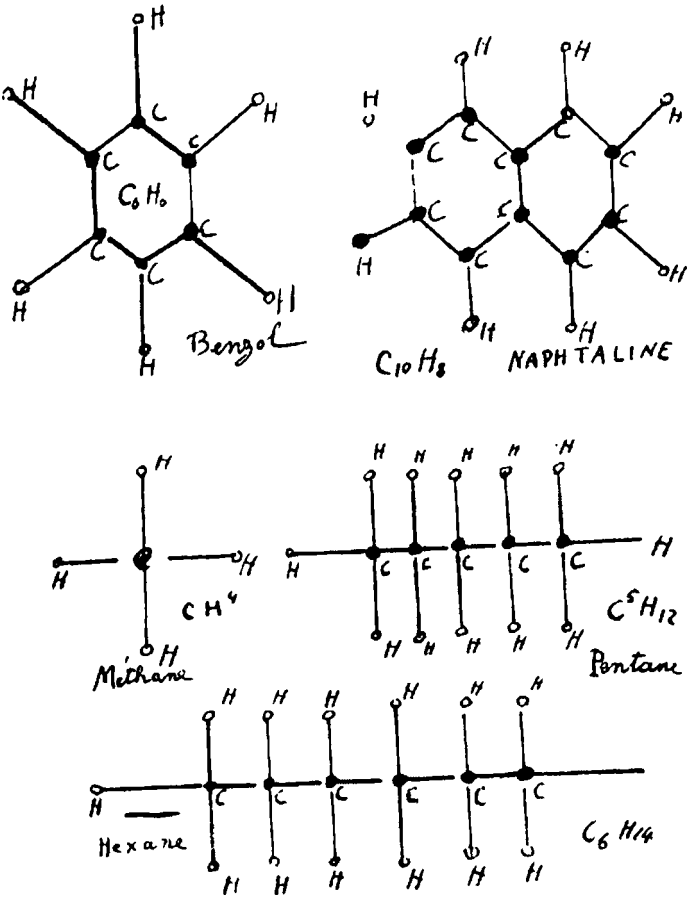
Acizii barbiturici (saporifice) conțin și ei C, H, O, N, cum este veronalul $C_4H_4N_2O_3$.

Și vitaminele sunt hidrați de carbon. Vitamina A este un hidrat de carbon pur $C_{20}H_{29}OH$. Vitamina B_1 este un hidrat de carbon combinat cu Cl.

Calciu Ca și siliciu Si sunt elemente metalice foarte importante în viața omului și în natură în general (corpul omenesc la o greutate medie de 76 Kg, conține 20 Kg de calciu, scoarța terestră conține 28% siliciu, îndeosebi de origine organică).

Din calciu se obține:

Varul nestins pur (oxid de calciu) Ca O.



PLANȘA XXIX

Carbonatul de calciu sau calciul, Ca CO_3, care stă la baza tuturor calcarurilor, conține mai ales elemente organice, corali, foraminifere. Marmurii sunt calcari cristalizați, precum stalactitele și stalagmitele. Creta este un calcar de pământ amestecat cu resturi organice, varul obișnuit un calcar amestecat cu noroi, creta marnoasă un calcar amestecat cu argilă.

Varul stins (amestecat cu apă) – $Ca(OH)_2$.

Ghipsul este un sulfat de var cristalizat, $Ca S_4$, iar alabastrul calcaros, onixul calcaros sunt varietăți de calcit.

Varul hidraulic conține argilă, cimentul este un var eminamente hidraulic, mortarul obișnuit conține var gros, nisip și apă. Betonul obișnuit se compune din mortar și pietriș.

Siliciul este un element metalic la fel de remarcabil ca și calciul.

Siliciul pur sau oxidul de siliciu Si_2O_4 sau $Si_2 O_2$, este cristalul de stâncă sau cuarțul pur, având drept varietăți colorate: ametistul, agatul, calcedonitul, onixul, jaspul, cornalina.

Pietrele de moară, silexurile, nisipurile, gresiile (cristalizate sau argiloase) sunt constituite din silice conținând mai multă sau mai puțină alumină (oxid de aluminiu) și fier. Gresia ceramică conține pastă coalinică și uneori feldspatică. Feldspatul este un silicat de aluminiu cu bază monoxidă (potasiu, sodă, var). Argila pură sau caolinul este un silicat hidratat de alumină $Al_2 O_3 . 2Si O_2 . 2H_2O$; se formează prin descompunerea feldspatului. La porțelan pasta este un amestec de caolin și feldspat cu glazură feldspatică.

Multe alte geme sunt, de asemenea, alcătuite în parte din siliciu; opalul este siliciu hidratat. Jadul este un silicat de magneziu și de calciu (nefrit) sau un silicat de sodiu și alumină (jadeită); jadul negru (cloromelanita), înrudit cu jadeita, are în plus 10% oxid de fier.

Sticla este, în general, un silicat dublu de calciu și sodiu.

Cât privește rubinele și safirele, ele sunt alumine (oxidul de aluminiu AlO_3). În stare pură alumina se prezintă ca safir înstelat, safir albastru, rubin, ametist și topaz orientale („nobile"), acvamarin, hiacint.

Silicații și aluminele, decorativi în stare pură, sunt deci și ei aliați cu principalele producții decorative ale omului, sticla și porțelanul.

Cele 92 de elemente din tabelul lui Mendeleev erau socotite până nu de mult ca reprezentând toate combinările elementare posibile ale materiei anorganice, iar faptul că spectroscopul nu descoperea pe celelalte planete și chiar în stelele cele mai îndepărtate decât elemente aparținând tabelului contribuise la întărirea acestei păreri.

Experiențele care au însoțit fisiunile atomice provocate cu ajutorul uraniului au făcut ca această certitudine să fie părăsită.

Dacă până acum natura nu a produs decât cele 92 de elemente, omul cel puțin a izbutit să creeze în laboratorul său, în mod artificial, adică prin iscusința sa, mai întâi neptuniul (cu numărul atomic 93)

și plutoniul 94, acesta din urmă fiind folosit ca ingredient în unul din cele două tipuri de bombe atomice, mai apoi, în mod succesiv, elementele cu numerele atomice 95, 96, 97, 98, 99 și 100 numiți: americiu, curiu, berkeliu, californiu, ateniu și centuriu. Nimic nu dovedește că lista este definitivă.

Iată ultimele 11 elemente din tabelul actual al corpurilor simple:

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
232,1	231	238,1	237	239	241	242	243	244		
Toriu	Proto-actiniu	Uraniu	Neptuniu	Plutoniu	Americiu	Curiu	Berkleliu	Californiu	Atheniu	Centuriu

Ceea ce am putut vedea în treacăt despre chimia anorganică ne-a arătat că numărul apare aici ca factor indicativ și constitutiv nu numai la scară atomică, ci și mult mai adânc, pe măsură ce pătrundem în interiorul atomului și chiar în nucleu; apare aici aproape în stare pură, iar noțiunile de par sau impar, atât de îndrăgite de pitagoreici când fac speculații despre numerele pure sau științifice, apar și ele, în legătură firească cu noțiunile de simetrie și asimetrie dinamică.

Biologia organică propriu-zisă ar depăși cu mult cadrul acestui capitol; numărul figurează și el aici însă în formule mult mai complicate din pricina varietății și dimensiunilor moleculelor organice constituite din atomi în număr considerabil care fac ca greutățile moleculare să atingă valori enorme. Clasa organică cea mai importantă, organizată și ea în molecule specifice, este aceea a proteinelor, azotul fiind elementul caracteristic, ele fiind indispensabile în hrana și dezvoltarea organismelor vii. Substanțele care le alcătuiesc sunt aceleași pe care le-am găsit în chimia anorganică; și aici, în afară de azot, oxigenul, hidrogenul și carbonul sunt componente fundamentale.

Hormonii masculini și feminini au, de pildă, următoarele formule:

$C_2 OH_{27} + OH$ (testosteron)

și $C_2 OH_{27} + C_2 OH_3$ (progesteron).

Am văzut că în fotosinteză plantele, datorită acțiunii luminii solare asupra clorofilei, transformă energia de tensiune joasă (degradată) în energie de tensiune înaltă, ecuația simbolică a acestei reacții fiind:

$$6CO_2 + 6\,H_2O = C_6\,H_{12}\,O_6 + 6\,O_2$$

lumină solară + acid carbonic + apă = zahăr + oxigen.

Vegetalele extrag și ele azotul din sol și îl condensează în proteine, care servesc la rândul lor drept hrană animalelor. Cât despre clorofilă, ecuația ei pare să fie:

Clorofila a $C_{55}\,H_{72}\,O_5\,N_4\,Mg$
Clorofila b $C_{55}\,H_{70}\,O_6\,N_4\,Mg$

Să menționăm aici, plutind încă între domeniul chimiei anorganice și cel al chimiei organice (deși biologiii sunt ispitiți să-i clasifice în domeniul din urmă), virușii filtranți, agenții patogeni atât de mici încât nu sunt vizibili la ultramicroscopul obișnuit, ci doar la microscopul electronic[2]. Ei cuprind, între alții, agenții patogeni ai gripei, ai guturaiului obișnuit, ai tifosului, ai variolei, și par să facă parte totodată din caracteristicile bacteriilor vii și din cele ale cristalelor anorganice (asta înseamnă că pot fi reduși în cristale care își păstrează proprietățile patogene și de proliferare când ajung în contact cu corpul subiectului sensibil la virus, al gazdei).

Mozaicul tutunului, de pildă, se poate cristaliza, după purificare, în niște ace lungi care, puse din nou în contact cu planta de tutun, redevin virulente.

Virusul care provoacă boala tomatelor cristalizează în dodecaedre rombice sub acțiunea unui tratament asemănător.

Din punct de vedere chimic, virușii sunt niște proteine cu greutate moleculară mare de ordinul a 40 de milioane față de cea a hidrogenului. (Greutatea moleculară a unui amestec gazos este egală cu dublul raportului densității sale față de cea a hidrogenului; greutatea atomică a hidrogenului este 1,008 și nu 1; este luată ca unitate greutatea atomului de oxigen socotită a fi 16. În general, greutatea moleculară a unui element este egală cu greutatea moleculei sale comparată cu cea a atomului de hidrogen.)

Câteva exemple de dimensiuni în lumea virușilor și a moleculelor:

Dacă $\mu\mu$, milimicronul = $\frac{1 \text{ m / m}}{1.000.000}$ este unitatea de lungime, bacteria *Bacterium prodigiosus* are o lungime de 750 $\mu\mu$.

Virusul epidemiei bovine clasice are 10$\mu\mu$ (este deja de ordin molecular).

O moleculă de hemoglobină are 6$\mu\mu$.

Virusul mozaicului tutunului: un bastonaș cu lungimea 2,80$\mu\mu$ și lățimea 15$\mu\mu$.

Microscopul electronic ne permite practic să vedem obiecte de 5$\mu\mu$, adică și pe cei mai mici viruși.

Să notăm că greutatea celei mai mici molecule de proteină este de 5.000 de ori mai mare decât greutatea unui atom de hidrogen. Greutatea celor mai mari molecule de proteină cunoscute este mai mare decât aceea a atomului de hidrogen de 1.000.000 până la 40.000.000 de ori.

O spun încă o dată, statutul virușilor, poziția lor exactă între organic și anorganic nu este definitiv hotărâtă, deși pentru moment biologia înclină mai degrabă în favoarea primei ipoteze. Ca și speciile vii, virușii au mutații, dar par să fie molecule de proteină (identice în anumite cazuri cum este cel al virusului tomatei) cu anumite proprietăți biologice proprii sistemelor organizate.

GENETICA

Să trecem de la domeniul abia atins al chimiei, biologiei, la genetică, regatul cromozomilor și al genelor. Fiecare celulă a unui organism viu conține două grupe identice de „cromozomi", mici filamente în număr total de 2N, după specie (omul are 48 de cromozomi în fiecare celulă normală).

Celulele sexuale mature, înainte de fecundarea ovulului, se despart în 2 gameți sau celule „haploide", conținând fiecare doar jumătate, N, dintre cromozomii (unul de fiecare pereche) celulei mame. La fecundare (singamie) un gamet masculin (spermatozoidul) și un gamet feminin (ovulul) se unesc și în felul acesta grupele de cromozomi se refac cu același număr N de perechi de cromozomi pe care îl aveau înainte de fisiunea celulelor sexuale. Începând cu celula fecundată, înmulțirea celulelor se produce succesiv prin simple împărțiri în două; în timpul acestui fenomen de „mitoză", fiecare

cromozom se rupe în două părți egale, fiecare parte instalându-se într-una din cele două celule fiice; numărul 2N al cromozomilor din fiecare celulă rămâne astfel constant.

S-a calculat că 60 de împărțiri succesive sunt de ajuns pentru a da naștere corpului unui om adult, ținând seama de deșeuri de celule moarte și dispărute. Aceasta înseamnă în jur de 100.000.000.000.000 de celule.

Tot astfel s-a calculat că un englez din zilele noastre, situat la vreo 30 de generații de la cucerirea normandă (1066) a avut în vremea acestei cuceriri mai mult de 500 de milioane de eventuali strămoși, or, cum Anglia nu număra la vremea aceea decât 8.000.000 de locuitori vedem ce număr enorm de urmași au aceiași strămoși, presupunând că individul despre care este vorba are 100.000 sau chiar un milion de strămoși efectivi printre cei 8.000.000.

Puterile lui 2 se comportă aici ca în vestita problemă a jocului de șah în care câștigătorul îi ceruse Șahului Persiei să pună o boabă de grâu în primul pătrat, 2 boabe în al doilea și așa mai departe, dublând numărul în fiecare pătrat, ajungând astfel la 2^{64} boabe de grâu. Aceasta ne amintește cazul parameciului, protozoar care se reproduce rapid prin diviziune scizipară și a cărui progenitură, după un an, ar avea greutatea globului... dacă, în ciuda imortalității teoretice, aceste generații nu ar dispărea la fel de repede cum apar.

Se știe acum că cromozomii sunt alcătuiți dintr-un anumit număr de elemente, genele, fiecare dintre acestea purtând și transmițând o caracteristică ereditată specială. Genele acestea sunt probabil molecule de proteină, și la fecundarea oului fiecare părinte își transmite în acest fel caracteristicile o dată cu genele reprezentate în grupa de cromozomi pe care o furnizează celulei primordiale a noului individ, oul fecundat.

Legile de transmitere și de repartizare a calităților ereditare au fost formulate pentru întâia oară de către abatele Gregor Mendel (1822–1884) și publicate de Brünn (Moravia) în 1866. La vremea aceea nu au fost luate în seamă, însă au fost regăsite în 1900 de către Vries (Leida) și de către alți doi savanți care lucrau independent unul de altul. Gena, recunoscută azi ca fiind purtătoarea specificațiilor ereditare ale individului și ale speciei, se presupune că ocupă volumul unui cub cu latura egală cu 100 de diametri de atomi (adică de 100 de ori distanța dintre centrele a doi atomi dintr-un cristal, de exemplu). Acest cub ocupă deci volumul a aproximativ un milion

de atomi. În interiorul acestor gene se produc *mutațiile* care afectează calitățile transmisibile, ereditare. Iar după foarte ingenioasa teorie a lui Schrödinger (*What is Life?*), mutația este cauzată de un fenomen fizic din interiorul genei (căci acest fenomen nu se întâmplă decât într-un singur cromozom și nu în cele două elemente ale unei perechi de cromozomi), iar acest fenomen fizic este asemănător cu un *salt cuantic* al unui electron de pe o orbită pe alta, salt care degajă sau absoarbe de fiecare dată un număr întreg de cuante după sensul diferenței de nivel energetic al orbitelor. Schrödinger presupune (și nimic nu i-a dezmințit ipoteza) că mutația nu este numai asemănătoare cu un salt cuantic, ci este efectiv pricinuită de un salt de acest gen, trecerea unuia sau mai multor electroni de pe o orbită pe alta, prin *ionizare*. În genă s-ar produce modificarea structurală care acționează asupra caracterelor transmise ca mutație. Dar care ar fi cauza mutației? Știm că mutațiile pot fi produse artificial iradiind genele unui organism viu cu raze x (fapt care pare să întărească teza lui Schrödinger). Cât despre mutațiile „naturale", am socotit razele cosmice niște agenți disruptivi sau ionizatori. Biologii cu tendințe teleologice, care văd natura și viața acționând ca și când ar urmări anumite scopuri, luând în considerație faptul că în cursul evoluției multe mutații se produc și se combină chiar și într-un sens „folositor" mai favorabil, sunt înclinați să creadă că acțiunea, cauza care dă naștere acestor salturi cuantice favorabile, ar putea fi câteodată o acțiune psihică (de origine extrafizică, „psyché" mai degrabă a speciei decât a individului), provenind dintr-o nevoie sau dintr-o dorință care acționează într-o anumită direcție.(După cum spunea Schopenhauer într-o parafrază, ogarul ar fi „voința obiectivată de a se repezi").

Dr. Schrödinger nu-și spune părerea însă nu exclude posibilitatea acestor „mutații dirijate"; acțiunea purei întâmplări ar introduce probabilități contrare de același ordin ca cele amintite de problema maimuțelor dactilografe sau a neaplicării principiului lui Carnot într-un sistem închis anorganic. Energia necesară pentru ionizarea care are drept rezultat adăugarea sau pierderea unui electron secundar, manifestarea fizică a saltului cuantic, este de aproximativ 30 de electron-volți. Mutația, în loc să dea naștere unui izomer sănătos, poate produce o leziune nocivă cromozomului care conține gena afectată.[3]

Concluziile dr. Schrödinger sunt cât se poate de imparțiale; el nu trece oficial de partea teleologilor însă scrie:

„Desfășurarea evenimentelor în ciclu vital al unui organism arată neîndoielnic o regularitate admirabilă, fără egal în materia neînsuflețită. Ea pare a fi controlată de un grup de atomi extrem de bine ordonat, care își are echivalentul doar într-o foarte mică parte din total în fiecare celulă... În cromozomi ordinea este menținută de un singur grup de atomi care are puterea să producă evenimente bine ordonate în armonie cu ceea ce le înconjoară și în acord cu legile cele mai subtile... Situația este fără precedent și nu este cunoscută nicăieri decât în materia vie".

Ceea ce îl uimește pe drept cuvânt pe dr. Schrödinger este tocmai influența disproporționată asupra organismului a jocului sau a prezenței unui număr infim de atomi, cât și venirea sau plecarea unui atom; cugetările sale sunt cu atât mai neobișnuite cu cât este partizanul nu atât al vitalismului, cât, mai ales, al determinismului fizico-chimic clasic.

Una dintre proprietățile paradoxale ale virușilor este de a produce mutații ereditare. Misterul stă în faptul că virușii sunt molecule de proteină atât de mici încât este greu de închipuit că ele conțin cromozomi și gene.

Tabelul lui Mendeleev își are aspectele sale matematice; nu ne vom mira să găsim aici puterile lui 2 omniprezente în oricare domeniu unde apar combinări, precum și coeficienții binomului. Iată un extras din baremul aferent:

Numărul de perechi corespunzătoare de gene caracteristice	Numărul de gameți formați în fiecare părinte	Binom	Numărul combinărilor (ouă fertilizate)
1	2	$(3 + 1)^1 = 4$	$2^2 = 4$
2	$2^2 = 4$	$(3 + 1)^2 = 16$	$2^2 = 16$
3	$2^3 = 8$	$(3 + 1)^3 = 64$	$2^2 = 64$
n	2n	$(3 + 1)^n$	2^{2n}
n = 24 pentru... om (24 de perechi de cromozomi)	2^{24} (în jur de... 16.000.000 numărul a combinărilor de 24 obiecte luate două câte două	$(3 + 1)^{24}$	2^{48} (200 de trilioane de tipuri de copii posibile)

UNDE ȘI NUMERE

Înainte de a ne despărți de chimia organică și anorganică am să mai reamintesc câteva cifre pentru a preciza dimensiunile elementelor atomice și infraatomice.

Raza atomului este de aproximativ 1 mm/10.000.000 sau 10^{-8} cm; se mai numește și „raza de acțiune a atomului".

Nucleul atomului are un diametru (și o rază) de 10.000 de ori mai mică decât cel al atomului[4].

Diametrele electronilor planetari: $3{,}2 \times 10^{-13}$ cm.

Diametrul nucleului de uraniu este $1{,}4 \times 10^{-11}$ cm.

Diametrul nucleului de aur este 2×10^{-12} cm.

Distanța dintre 2 atomi de carbon în diamant este $1{,}54 \times 10^{-8}$ cm.

Dacă $16^{-16} = \omega$, atunci pentru aur vom avea de pildă:

diametrul protonului = ω

diametrul electronului = $10^3\,\omega$

diametrul nucleului = $2 \times 10^4\,\omega$

diametrul atomului = $2 \times 10^8\,\omega$

Unitățile folosite pentru a măsura dimensiunile mici în chimie, biologie se aplică, după cum am văzut:

Micronul $\mu = \dfrac{1\text{ m} / \text{m}}{1\,000}$

Milimicronul $\mu\mu = 1\mu/1000$

Angström = Å = $1\mu\mu/10$

Unitatea X UX = 1Å/1000

Iată acum, pentru a compara aceste unități, un tabel cu lungimile de undă aparținând undelor electromagnetice, care cuprind undele hertziene, folosite în radiologie și radio, precum și undele luminoase și cele calorifice.

Între λ – lungimea de undă, v – viteza, f – frecvența, t – perioada (timpul necesar pentru o oscilație) avem:

$$\lambda = \frac{v}{t} \qquad f = \frac{1}{T}$$

Planșa XXX dă lungimile diferitelor unde grupate în octave pe o claviatură imaginară, vedem în special că undele calorifice sunt (aproape de infraroșu) unde electromagnetice cu lungimi de undă de la 100μ până la μ. În octava undelor luminoase avem pentru roșu

LUNGIMI DE UNDĂ

Dinam curent alternativ	Unde lungi radio	Unde scurte radio	Căldură (infraroșu)	Lumina	Ultra violet	Raze X	Radiu	Raze cosmice
6000 kilometri	30 km la 200 m 22 →	100 m la 0,5 m apoi câțiva milimetri octave	3,14 μ la 0,8 μ 8 octave	0,8 μ la 0,4 μ 1 octavă	0,4 μ la 0,15 μ 5 octave	0,015 μ la 0,000006 12 octave	0,0001 μ la 0,100002 5 octave	0,00002 $\mu\mu$

Frecvențele de la 10.000 (pentru radio) la 150 de cvintilioane pentru radiu.

$$1 \text{ micron} = 1\mu = \frac{1 \text{ m} / \text{m}}{1\,000} \qquad 1 \text{ milimicron} = 1\mu\mu = \frac{1\ \mu}{1\,000}$$

$$1 \text{ angström} = 1\text{A} = \frac{1\ \mu\mu}{10} = 10^{-8}\text{cm}$$

PLANȘA XXX

de la 100μ până la μ. În octava undelor luminoase avem pentru roșu $\lambda = 0\mu$ 65, pentru violet $\lambda = 0\mu$ 42.

Întrucât culorile spectrului luminos sunt caracterizate și prin frecvența vibrațiilor [acestea fac parte din marea gamă a undelor începând cu undele hertziene radiofonice și până la cele pe care le emit corpurile radioactive (vezi tabelul VII)], aceasta a sugerat unor esteticieni comparații ingenioase între octava spectrului luminos (lungimi de undă de la $800\mu\mu$ pentru violet până la $400\mu\mu$ pentru roșu) și gama temperată a muzicienilor. Prin analogie cu cercul muzical al cvintelor, s-au stabilit mai multe cercuri cromatice pentru culori. Se știe că sunt două școli antagoniste în ce privește desemnarea culorilor primare: școala fizicienilor (Helmholtz), pentru care culorile primare sunt albastru, verde și roșu, iar cele complementare galben, violet și verde-albastru[5], și școala artiștilor, pentru care culorile primare sunt albastru, roșu și galben, iar cele complementare portocaliu, verde și violet.

Wilson a combinat un cerc cromatic în 12 segmente, în care fiecărei culori îi corespunde o notă din gama temperată (culorile primare sunt albastru: la, galben: fa, roșu: re, iar cele complementare portocaliu: mi, violet: do, verde: sol).

Un alt cerc cromatic cu 12 segmente conține 4 triade sau acorduri de 3 culori pentru care culorile progresează prin cvinte asemenea notelor în gama pitagoreică; ca și în gama lui Wilson, punctul de plecare este același ca pentru școala artiștilor, prima triadă furnizând culorile primare roșu, albastru, galben, iar cea de-a treia pe cele complementare verde, portocaliu, violet. Putem spune (și aceasta este părerea lui André Lhote) că acest acord verde, portocaliu, violet corespunde (în pictură) acordului perfect; este major și minor după cercul cromatic folosit. De pildă Do, Mi, Sol este major în cercul lui Wilson; o nuanță de violet dă Mi, Sol, Si, acord perfect minor.

Nu ne putem despărți de chimie fără să dăm câteva nume „absolute" care apar în acest domeniu, mai întâi vestitul „Număr al lui Avogadro". Câteva definiții preliminare sunt necesare; am văzut că greutatea moleculară a unui grup este raportul dintre greutatea unei molecule a acestui corp și aceea a unui atom de hidrogen (sau de 2 ori raportul dintre greutatea moleculei sale și aceea a moleculei de hidrogen, hidrogenul fiind biatomic).

Molecula-gram este în acest caz egală cu un număr de grame egal cu greutatea moleculară a substanței:

(M = 2 grame pentru hidrogen
= 32 grame pentru oxigen etc.).

Or, o moleculă-gram (M grame) din oricare gaz la 0° și 760 mm, ocupă același volum, 22,4 litri, și conține același număr de molecule, $6{,}06 \times 10^{23}$; este „Numărul lui Avogadro". Volume egale de gaze oarecare (diferite) au la aceeași temperatură același număr de molecule, adică 27×10^{15} molecule pe mm^3.

Aici se încheie acest tur de orizont al Universului exterior perceput și a ceea ce putem ghici sau pricepe din Universul real ale cărui umbre se proiectează ca niște fenomene măsurabile pe pereții peșterii noastre, totul fiind considerat din punctul de vedere al Numărului; Număr pe care l-am întâlnit în matematica pură, în geometrie, în morfologia ființelor vii și a cristalelor. Număr în chimie, în biologie, în genetică, Număr în estetică, în artele spațiului și în arte în timp (limbajul și muzica), în sfârșit Numărul în marile legi ale naturii.

În afara domeniilor matematicii străbătute cu prilejul acestui tur de orizont trebuie să-l citez și pe acela al calculului probabilităților, pe care l-am lăsat de o parte nu pentru că nu ar fi foarte important și că Numărul nu ar juca aici un rol de prim ordin, ci pentru că ar fi extins dincolo de limitele sale firești materia acestui volum.

Îmi voi lua îngăduința să dau în continuare numai axiomele logistice pe baza cărora Bertrand Russell, după părerea lui C.D. Broad, pune bazele Calculului Probabilităților.

Dat fiind conceptul de „probabilitate a lui p dacă h este dat", denotat de $\frac{p}{h}$, se pun următoarele axiome:

1° p și h fiind date, nu există decât o valoare pentru p/h.

2° Valorile posibile ale lui p/h sunt toate numerele reale dintre 0 și 1, inclusiv acestea două (alții limitează aceste valori la numerele raționale).

3° Dacă h îl implică pe p, atunci p/h = 1 (certitudine).

4° Dacă h îl implică pe p · non-p, atunci p/h = 0 (imposibilitate).

5° Probabilitatea de p și q, h fiind dată, este probabilitatea p/h înmulțită cu cea de q, p și h fiind date, și este egală și cu probabilitatea q/h înmulțită cu probabilitatea de p dacă q și h sunt date.

6° Probabilitatea de p și/sau q, h fiind dat, este probabilitatea p/h plus probabilitatea q/h minus probabilitatea de p și q, h fiind dat.

Calculul probabilităților face firește apel la calculul combinărilor, deci la coeficienții binomului (curba lui Gauss); Keynes l-a tratat și prin teoria grupurilor.

Unul dintre paradoxurile aparente, potrivnice simțului comun, ale calculului probabilităților este legea că la ruletă, de pildă, după ce roșul a ieșit de un foarte mare număr de ori, sunt tot atâtea șanse să iasă roșu sau negru (trecutul nu contează; acest fapt este riguros doar pentru o ruletă ideală și un crupier ideal, amândoi fără ecuație personală). Dovada matematică a paradoxului aparent este că la un șir foarte mare de ieșiri consecutive, numărul șirurilor de n roșii este egal cu numărul șirurilor $\overline{n+1}$ roșii plus numărul șirurilor $\overline{n+2}$ roșii plus ect. Sau: la fiecare ieșire, șansa ca roșu să iasă *o dată* (intermitență) este egală cu șansa pentru un șir de 2 roșii plus șansa pentru un șir de 3 roșu plus etc.

De pildă, pentru 1024 de ieșiri vor fi aproximativ 512 intermitențe (1 roșu), 256 de șiruri de 2, 128 de șiruri de 3, 64 de șiruri de 4, 32 de 5, 16 de 6, 8 de 7, 4 de 8, 2 de 9, un șir de 10 de roșu. Acum câțiva ani, roșul a ieșit de 29 de ori la rând la Monte Carlo.

Ne rămâne să tragem concluziile, dacă sunt, și să hotărâm dacă „Mistica Înghețată a Numărului Pur" este, pentru a concepe și a cerceta Cosmosul, un element care sărăcește, secătuiește sau, dimpotrivă, așa cum pretindeau Pythagoras și Platon, un izvor de armonie, o îmboldire a dorinței, a strădaniei către un ideal senin, chiar exaltant.

NOTE

[1] De asemenea A_r.

[2] Câteva dimensiuni:

Diametrul atomului (L. de Broglie) = 1mm/10.000.000 = 1cm x 10^{-8}

Limita de vedere a microscopului electronic = 1 cm x 10^{-6}

Lungimea elementului de virus al mozaicului tutunului: 1,28x10^{-6} cm

Lungimea elementului de virus al grupei: 12x10^{-6} cm,

[3] Să notăm că s-a reușit să se vadă zonele cu ajutorul microscopului electronic.

[4] Dacă se compară diametrul nucleului cu acela al unui bob de mazăre (1 cm), raza atomului de hidrogen va fi de 500 km, iar diametrul electronului planetar de 10m.

[5] Școala fizicienilor se bazează pe faptul că retina are niște zone esențiale acordate în mod special la roșu, la verde și la albastru, culori cu care se pot compune toate celelalte, în timp ce alegerea școlii artiștilor se acordă în mod mai firesc cu instinctul și tehnica pictorilor.

CONCLUZII

Teleologia este o doamnă fără de care nici un biolog nu-și poate duce traiul. Și totuși se rușinează să fie văzut cu ea în lume.

(Von BRÜCKE)

O concluzie preliminară care reiese din tot ce s-a spus până acum este mai întâi de toate aceea că, așa cum zicea Bertrand Russell, axioma fundamentală a lui Pythagoras își găsește confirmarea:

„Totul este rânduit după Număr."

Își găsește, de asemenea, confirmarea afirmația pitagoreică exprimată limpede de Nicomachos din Gerasa conform căreia în universul fenomenelor percepute de simțurile noastre importantă este structura, iar nu substanța. Toate acestea rezultă din tot ceea ce a adus la lumină fizica-matematică modernă, studiu al structurilor și al invariantelor perceptibile și calculabile în universul înconjurător. Instrumentele acestei explorări au fost nu numai mecanica pură și aplicată, relativitatea și mecanica cuantică ondulatorie, ci și disciplina matematică foarte abstractă (cu auxiliarul său, calculul tensorial) care, sub denumirea teoria grupurilor, apare, după cum a observat Eddington, atât în structura universului, cât și în aceea a inteligenței omenești („este ordine pe undeva").

Pythagoras și Platon situau izvorul armoniei (al ordinii armonioase) în inteligență, „Nous-ul" Creatorului, în care își au locul arhetipurile fundamentale, Numerele și Formele (sau Numerele și Ideile). Numerele ca Ritmuri și ca Legi, ca regulatoare ale Formelor, și chiar Numerele pure asemenea celor care figurează în constantele Universului.

Este interesant să constatăm că dintre aceste arhetipuri, Numere și Forme totodată, Numerele Figurate au fost studiate de Pythagoras, de Platon și de Descartes, creatorul geometriei analitice[1].

Determinismul fizico-chimic al secolului al XIX-lea, moștenit de la Lucrețiu, încercase să reducă ordinea la o lege oarbă și influențabilă, din care nu numai Creatorul, ci și conștiința omenească era exclusă întrucât ea nu era decât o rezultantă a reacțiilor fizico-chimice din corp. (După cum spunea cu eleganță un personaj al lui Claude Farrère în *Les Civilisés:* „Sufletul este integrala reacțiilor chimice din corp".) Era lipsită de orice facultate autonomă de a voi, de a dori, de a acționa. Savanții determiniști nu își dădeau seama că putința lor de a raționa, dorința lor de a-și explica conștiințele prin modele fizico-chimice erau însăși dovezile preocupărilor teleologice și sugerau, dacă le-ai fi admis teoriile, imaginea stranie a unor cumpene care se cântăreau ele însele și „știau că se cântăresc". Până și cei care fabricau în mod sintetic compuși organici delicați, hormoni sau vitamine, și care credeau că au înlocuit astfel în mod avantajos acțiunea vieții, nu chiar, de fapt, decât demoni ai lui Maxwell, fără doar și poate vii și teleologici.

Lovitura de grație dată determinismului materialist a fost constatarea că principiul minimei acțiuni, lege supremă a lumii anorganice (al cărei principiu al inerției este un caz limită), nu se aplică sistemelor închise care conțin organisme vii; viața (și aceasta este o revelație care are aproape aceeași importanță ca însuși criteriul) acționează sau poate acționa ca o forță care provine dintr-o direcție din afara sistemului, dintr-o altă dimensiune. Lucrul acesta părea a se potrivi cu noile ipoteze (Stromberg și R. Ruyer) despre câmpurile de forțe vii organizatoare autonome care ar genera embriologia și creșterea organismelor vii și care, provenind, de asemenea, dintr-o dimensiune exterioară lumii cvadridimensionale a spațiului-timp einsteinian, ar acționa asupra câmpurilor electromagnetice ale organismelor vii, ale omului în mod deosebit, pentru a le pune probabil în rezonanță cu propriile lor frecvențe.

Aceasta se potrivește și cu rezultatele extraordinare obținute de aparatele radioterapeutice pentru stabilirea diagnosticului și a tratamentului care trimit unde cu frecvențe apropiate în organele corpului afectate în mod deosebit de o tulburare patologică[2]. Teoria acestei terapeutici radionice constă în faptul că fiecare organ al corpului omenesc emite o undă electromagnetică cu frecvență

specifică, ce își schimbă frecvența când organul este afectat. Platon, cu intuițiile lui în mod ciudat profetice, declarase că toate bolile corespund unor întreruperi ale armoniei corpului omenesc (a ceea ce am putea numi armonia metabolică); în legătură cu radiațiile emise sau absorbite de corpul omenesc, el scrie următoarele rânduri în *Philebos*:

„Trebuie să presupuneți că dintre impresiile pe care corpul nostru le primește neîncetat, unele se sting în corp înainte să ajungă la conștiință, pe care nu o afectează astfel deloc, însă altele străbat și corpul, și conștiința și emit un soi de vibrație; unele dintre aceste vibrații sunt specifice corpului sau conștiinței, unele sunt comune."

Experiențele controlate de telepatie și de percepție supranormală efectuate vreme de mai mult de cinciprezece ani de către dr. Rhine la Universitatea Duke din Statele Unite sugerează, de asemenea, existența unei lumi extraspațiale, a unei dimensiuni exterioare lumii fizice normale în care s-ar petrece uneori aceste fenomene. Fenomenele de clarviziune, de vindecare sau de vrajă de la distanță obținute de anumiți medici-vraci sau vrăjitori negri în Africa sau în Republica neagră a Antilelor, au zdruncinat până și septicismul unor martori serioși. Se pare, așadar, că Viața, dacă ținem seama de aceste manifestări, acționează dintr-o dimensiune încă imperfect cunoscută care ar putea fi a cincea dimensiune a geometriilor; am văzut că ei au explorat fără greutate aceste lumi cu 4, 5 sau n dimensiuni și că Numerele figurate ale pitagoricienilor și triunghiul lui Pascal au permis să se stabilească specificațiile tuturor hipercorpurilor regulate din hiperspațiu.

Pentru a ne întoarce la lumea anorganică, știm că în regiunea sa infraatomică, aceea a particulelor și a undelor asociate, determinismul absolut, legea însăși a cauzalității, a fost brusc zdruncinat de principiul de incertitudine sau de nedeterminare al lui Heisenberg: este cu neputință să percepem sau să calculăm în același timp poziția unui electron (sau a unui proton) și viteza lui. Am menționat într-un alt capitol aproximațiile la care se ajunge considerând cunoscut unul din acești doi factori.

Această lovitură dată determinismului îi necăjește (pe nedrept, mi se pare) pe partizanii săi fanatici, însă determinismul rămâne adevărat pentru lumea neînsufletită la scară macroscopică. Argumentul potrivit căruia printre cauzele care împiedică precizia în observarea particulelor se află prezența și acțiunea observatorului,

care ar acționa asupra vitezei sau asupra poziției electronului (tot așa cum aplicarea stetoscopului deranjează ritmul inimii), se pare că șchioapătă puțin, căci până la urmă ne-am putea închipui, ca în alte cazuri asemănătoare, „observatorul ideal"; însă savanți atât de eminenți ca Louis de Broglie declară că în domeniul infraatomic legea riguroasă a cauzalității este definitiv sortită eșecului și nu putem decât să fim de acord[3].

Intervenția matematicienilor în studierea Universului, departe de a aduce concluzii dezamăgitoare pentru filosof și de a tăia aripile idealului, a favorizat, dimpotrivă, ceea ce Sir James Jeans numește „o concepție *mentalistă* despre lume"; Jeans se gândea în mod deosebit la dematerializarea pentru totdeauna a materiei (aceea prevăzută de Gustave Le Bon), transformarea ei mai întâi în energie pură (tot vestita formulă a lui Einstein $E = mc^2$), apoi conceperea undelor asociate care sunt unul din cele două aspecte echivalente ale ultimelor particule pseudomateriale, ca unde de probabilitate pură, grile de cifre sau „unde de cunoaștere" situate și ele, asemenea misterioaselor câmpuri de forțe vii organizatoare, într-o lume în afara spațiului-timp fizic.

Filosofii materialiști (mai sunt mulți, îndeosebi în Franța) nu au privit cu ochi buni amestecul matematicienilor în treburile lor și i-au rugat, uneori plini de arțag, să-și vadă de ale lor și să lase în pace metafizica. Departe de a le asculta sfatul, matematicienii au dezvoltat pe îndelete concluziile logice sugerate de fizica matematică modernă. Astfel dr. Whittaker, profesor de matematică la Universitatea din Edinburg, a calculat după legile termodinamicii (tot vestita lege a doua) și după evoluția corpurilor radioactive „vârsta lumii" și a găsit cifre aproximativ concordante și în acord, de asemenea, cu claculele astronomilor; el situează momentul începutului Universului între $3x10^9$ și $5x10^{11}$ ani î.Hr.[4]. Începutul acesta ar presupune o entropie nulă[5] și o stare absolut omogenă, izotropă (unii astronomi postulează chiar un volum *zero*, un Univers redus la un punct), iar singurul eveniment care ar putea deranja această stare de echilibru absolut și provoca un „început absolut", ar fi fie o creare *ab nihilo* în acord cu ideologiile sau teologiile celor mai multe religii, fie „un bobârnac inițial", ruptură „improbabilă" de echilibru, dat de un *demiurg* din afară, dacă nu de Dumnezeu însuși.

Chestiunea prezenței Vieții pe alte planete, a „pluralității lumilor locuite", după cum zicea Fontenelle, a dat și va mai da prilej de

speculații. Iată un exemplu de calcul ipotetic în legătură cu acest subiect:

Se poate estima că o stea dintr-o sută de mii are sistem planetar (asemenea Soarelui); că un sistem planetar din 100.000 are probabil ființe vii; că o planetă cu ființe vii din 100.000 a dat probabil naștere în cursul evoluției unei „specii omenești" tot atât de avansată (sau mai mult) decât a noastră. Rezultă de aici (ținând seama de numărul probabil de galaxii) că există în Universul nostru nu mai puțin de 400.000 de planete locuite de ființe tot atât de avansate ca noi. Aceasta în ceea ce privește Universul finit al lui Einstein.

Întorcându-ne la incidențele matematicii cu metafizica, am menționat deja în alt capitol că teoria mulțimilor *transfinite* sugerează anumite aplicări în teologie, în mod deosebit legat de calitățile de infinitudine atribuite facultăților de percepție, cunoaștere, prezență universală a Divinității (facultate între altele de a fi în același timp și în orice moment în oricare punct al Universului, fiind vorba tot de Universul finit al lui Einstein și de teoria Universului în expansiune). Cohortele nesfârșite de mulțimi, numărabile sau nenumărabile, care pot la rândul lor să se eșaloneze în trepte în număr transfinit, ne-au făcut aceste atribute, având și ele caractere transfinite, mult mai ușor de înțeles. Aici se pune o altă problemă foarte interesantă, matematică și metafizică totodată: este oare Timpul un continuu propriu-zis, așa cum este „Marele Continuu" arhimedic al numerelor reale (acela pe care l-am atribuit spațiului geometriilor asimilându-i punctele cu punctele reale de pe o dreaptă – cu punctele reale, de pildă, dintre 0 și 1) sau este doar un continuu *numărabil*, ca cel al numerelor raționale fracționare. Trebuie să facem aici deosebirea între timpul psihologic descris de Bergson, „durata psihologică" ce constituie țesătura aparentă a conștiinței noastre, și între timpul științific, cel al spațiului-timp al lui Einstein. Teoretic, acesta din urmă este identic cu o direcție în spațiu, iar noi îi atribuim astfel (poate arbitrar) o corespondență punct cu punct, o clipă pentru fiecare punct, cu conținutul spațial al numerelor reale. Însă problema se pune totuși poate mai direct pentru timpul psihologic, care, deși a inspirat mai mult sau mai puțin automat ideea unui șuvoi neîntrerupt (fluxul continuu aparent al conștiinței noastre) ar putea fi alcătuit nu numai din elemente dense de durată (precum numerele raționale) însă numărabile, ci chiar din elemente discontinue. În spațiul însuși, de altfel, ideea unei discontinuități continue a fost

introdusă de discontinuitatea cuantelor de energie (cuante de acțiune a lui Planck), iar alegerea între cele trei posibilități (timp continuu, dens numărabil sau discontinuu) nu este, de fapt, rezolvată nici pentru timpul științific, nici pentru timpul psihologic, individual.

Am menționat mai înainte teoria Universului în expansiune așa cum a fost prezentată de către abatele Lemaitre. Se știe că, după ce au constatat o restrângere progresivă către roșu a liniilor spectrului nebuloaselor, astronomii au explicat faptul presupunând că este vorba de un efect analog efectului Doppler–Fizeau pentru sunet (creșterea sau micșorarea înălțimii aparente după cum sunetul se apropie sau se depărtează); această ipoteză este întărită de primele rezultate obținute de telescopul uriaș de la Polomar. Acest lucru înseamnă că nebuloasele par să se îndepărteze către marginile Universului einsteinian [un volum finit[6]], vitezele lor fiind, conform observațiilor spectroscopice, proporționale cu distanțele dintre nebuloase și observator socotit centru (orice punct al volumului frontieră al unei hipersfere este un centru de simetrie pentru restul acestui volum). Or, va veni un moment când (la o distanță de aproximativ 1750 de milioane de ani lumină) vitezele anumitor nebuloase o vor atinge pe aceea a luminii și, chiar prin acest fapt, razele lor luminoase nu vor mai ajunge până la noi, vor fi părăsit universul nostru, doar dacă nu-i fac înconjurul pentru a se întoarce cu viteze progresiv descrescătoare. O altă dificultate a acestui caz limită, și care sporește neclaritatea acestei situații ipotetice, este că la viteza luminii orice masă devine teoretic infinită fără să intre la socoteală și o temperatură probabilă de zero absolut (-273° 16 cent) la care moleculele și atomii își pierd mobilitatea, dar dobândesc o conductibilitate electrică infinită.

Acest Univers mărginit și, totodată, fără margini (asemenea suprafeței unei sfere), fie că este sau nu în expansiune, ridică o altă problemă: nimic nu este împotrivă ca, dincolo de această limită confirmată de aberațiile aparente ale proprietăților materiei și ale formulelor care le exprimă, să nu fie alte universuri metagalactice asemănătoare cu al nostru, în mod absolut independente de al nostru, neavând nici o legătură posibilă sau imaginabilă cu al nostru. Și aceste universuri, fără legătură între ele, pot să fie la rândul lor în număr limitat sau în număr transfinit numărabil. Ne-am întors oarecum la situația de acum cincizeci de ani când se putea presupune logic că Universul este infinit (deoarece dacă ar fi finit, ce ar fi

dincolo de el? vidul absolut, se presupunea, era oricum tot spațiu; nu aveam pe atunci noțiunea de spații curbe). În acest caz, în mod logic numărul stelelor ar fi fost infinit. Și se punea încă de pe atunci întrebarea: un infinit actual, concret, e oare cu putință? Cantor și E. Borel ne-au scăpat de atunci de aceste scrupule, făcându-ne, ca să zicem așa, să atingem cu degetul infiniturile actuale, numărabile și nenumărabile, pe un mic segment de dreaptă. Întorcându-ne la cosmologia noastră postensteiniană, dacă admitem un număr transfinit de alte universuri îndepărtate, numărul celor 400.000 de planete, posibil locuite, din calculul de mai înainte va fi înmulțit cu un cardinal transfinit de tipul Aleph Zero, iar numărul combinărilor posibile ridicat la puterea înspăimântătoare a continuului. După cum spune părintele Teilhard de Chardin, rezumând în mod miraculos teoria combinărilor:

„În Univers, tot ceea ce este cu putință se înfăptuiește."

Fizica matematică și matematica pură se pare că ne-au adus, după cum lăsam să se prevadă, de la materialismul secolului al XIX-lea, reînnoit cu Lucrețiu, la concepții apropiate de acelea ale lui Pythagoras; Eddington nu s-a temut să afirme că nimic în fizica și cosmologia de astăzi (dând o mână de ajutor și dr. Whittaker)nu exclude ipoteza unui „Nous" sau Logos universal înzestrat cu o inteligență transfinită; uscăciunea care, după temerile noastre, trebuie să fie rezultatul progresului cunoașterii științifice s-a transformat într-un idealism la fel de transcendent ca cel al lui Platon și foarte apropiat de el. Îmi iau îngăduința, în încheiere, să inserez aici alte două cugetări, care se completează una pe alta, ale părintelui Teilhard de Chardin:

„Putem spune că... atât cât vezi cu ochii, Lumea din jurul nostru merge în derivă împinsă în sens opus de două curente împreunate, amândouă ireversibile: entropia și viața".

Și:

„Bucuria de a-mi aduce măcar cu un atom obolul la rostuirea pentru veșnicie a unei Lumi: nimic altceva n-ar putea la urma urmei să-mi stârnească interesul. Să eliberez o infimă cantitate de absolut. Să slobod un pic din ființă, de-a pururi."

Trebuie în cele din urmă să-mi cer iertare unora că am introdus puțin din acest ideal într-o carte cu tendință științifică, altor cititori că am împănat-o cu cifre și cu formule... dar la urma urmei era vorba despre Număr. Nădăjduiesc oricum să fi dovedit că Mistica Numărului

nu sfârșește în mod necesar în stepe înghețate, ci, câteodată, în poieni voioase împodobite cu florile neașteptate ale închipuirii și ocrotite de frunzișul binevoitor al uriașilor copaci milenari.

NOTE

[1] Geometria analitică, care a făcut să fuzioneze algebra cu geometria, nu a fost studiată separat în această lucrare; am presupus că măcar principiul său era cunoscut cititorului. Orice curbă poate fi reprezentată printr-o funcție de tipul: $y = f(x)$ generalizat.

[2] În California, doctorul sau mai degrabă doctorița Brown, ale cărei aparate le-am putut mânui în deplină libertate, a construit între altele un instrument care oprește pe loc hemoragiile unui bolnav aflat chiar la mare distanță; se pune în circuitul instrumentului o picătură uscată din sângele lui. Acest aparat a primit medalia de aur a Institutului Rockefeller și este folosit cu succes în unul din marile spitale din Chicago. Voi termina amintind un alt instrument (brevetat de dr. Brown) care, operând tot cu picătura de sânge a unui bolnav absent, realizează o fotografie pozitivă, luată din interior, a țesuturilor *moi* din organul afectat.

[3] Profesorul Schrödinger însuși, fără să fie suspectat de tendințe teleologice sau vitaliste, admite că pentru unele particule, cum este electronul, fiecare observație nu este decât un eveniment izolat, „chestiunea identității nu are cu adevărat și în mod real nici un sens". În ultima sa carte (*Science and Humanism*, Cambridge University Press) scrie: „Materia este o imagine în spiritul (*mind*) nostru, spiritul este astfel anterior materiei (în ciuda straniei dependințe empirice a proceselor mele mentale de datele fizice oferite de o anumită porțiune de materie, creierul meu)".

Corpul omenesc, de altfel, dată fiind distanța dintre electroni, atomi și nucleele lor, este în realitate gazos; numai viteza de vibrație a moleculelor și atomilor dă iluzia opacității și durității. Corpuri cu adevărat solide sunt satelitul lui Sirius numit „piticul alb", care are o densitate de greutate de o tonă pe un centimetru cub și un alt „pitic alb" a cărui densitate este de vreo câteva mii de ori mai mare.

P. Langevin: „Porțiunea din materie pe care o etichetăm și pe care o putem urmări este o proiecție a conștiinței noastre individuale."

[4] Vârsta Pământului solid ar fi în jur de 2×10^9 ani; apariția vieții (după fosile) ar data de vreo 500.000.000 de ani, cea a Tarsioidului lemurian, strămoșul lemurienilor, al maimuțelor antropoide și al omului de 55.000.000 de ani, cea a raselor omenești deja diferențiate de 1.000.000 de ani. Sinantropul (hominid) din Pekin ar data de 500.000 de ani î.Hr.

[5] Entropia este energie degradată, de joasă tensiune. Dacă notăm entropia cu H, avem: $H = dc/T$ dc fiind cantitatea de căldură degajată într-un interval de timp infinit de mic, T temperatura absolută a sistemului în acel moment. Avem, de asemenea: dH/dt întotdeauna pozitiv în materia neorganizată.

[6] Acest volum este volumul curb cu trei dimensiuni care formează frontiera sau „suprafața frontieră" a unei hipersfere cu patru dimensiuni. Se poate calcula formula

$2\pi^2R^3$, R fiind raza hipersferei Universului. R a fost calculat prin diverse metode; Einstein găsise 1000 de milioane de ani lumină (1 an lumină este egal cu 10.000 de miliarde de kilometri), de Sitter 1750 de milioane de ani lumină; o altă aproximație este de 5000 de milioane de ani lumină. Cifra 1750 de milioane este interesantă deoarece este distanța la care viteza nebuloaselor recesionare devine egală cu cea a luminii. Îl las pe cititor să aleagă raza și să calculeze volumul finit al Universului în ani lumină cubi.

POSTFAȚĂ

„GEMAȚIE“ ȘI GEMINARE

de

CORNEL MIHAI IONESCU

Oricât de „epurată" de scoriile realului sensibil i-ar fi apărut lui Matila Ghyka „metafizica" întemeiată pe aritmosofia pitagoreică[1], în virtutea căreia „totul este ordonat potrivit numărului", oricât de „intens" ar fi fost „extazul"[2] produs de „mistica înghețată a numărului pur"[3], un nucleu secret de carență și angoasă fertilă face ca „sophia" să iasă din complezența narcisică a sinelui și să aspire spre sine ca „iubire"[4], ca în desăvârșirea și diofania cristalului să zvâcnească, ocrotit de o penumbră amniotică, un puls impur de viață organică, promisiune de febrilitate, efemer și moarte; ca în miezul criptic al strălucirii formelor vii să opereze o pulsiune contrarie spre calmul „înghețat" al materiei neînsufletite; ca în cele mai desăvârșite opere de artă, veșnicia lor făgăduită să ia chipul duratei umane, adică al intermitențelor amneziei și circularității mimetice care o compromit.

Subtilul gânditor a intuit paradoxul fericit prin care în „rigiditatea cristalină și abstractă a lui Pitagora" sălășluiește „înlănțuită" „o pulsație dinamică" ce va fi formalizată ca „simbol matematic al creșterii vii"[5].

Această intuiție este cu atât mai revelatorie cu cât, în clima Parisului *fin-de-siècle*, începând din 1891, personalitatea lui Matila Ghyka s-a desăvârșit într-o cultură de extrem rafinament care aspira să „epureze" „unitatea întunecată și adâncă" a „corespondențelor" baudelairiene, chiar și de cele mai rarefiate efecte de contingență ale „miresmelor, culorilor și sunetelor (care) își răspund" încă în

„pădurile de simboluri"[6]. „Demonul analogiei" din poemul lui Mallarmé este un *antimimon pneuma*, un spirit gnostic, parodic și antifrastic al numinosului care mai sălășluiește în „Templul Naturii" din sonetul lui Baudelaire. El a răsturnat „corespondența" celor multiple și eterogene într-o criză a semiozei și semnificației, operând sub aparența fastă a „glorioasei Amintiri" (într-o vădită parodie a anamnezei platoniciene) ca sacru demoniac, „irecuzabilă intervenție a supranaturalului", care indica „angoasa sub care agonizează spiritul stăpân cândva (pe sine)": „V-au cântat vreodată, pe buze, cuvinte necunoscute, zdrențe blestemate ale unei fraze absurde?"[7] „Demonul" mallarmean expulzat din gloria „analogiei" cu Tatăl anihilează nu doar reziduurile senzuale ale contingenței, ci însuși sensul creației pe care, în spirit aproape gnostic, Fericitul Augustin o numea în sumbra viziune din opera sa târzie *regio dissimilitudinis* (tărâmul neasemănării). Iluzia „demonului analogiei" că ar suprima realul și sensul este denunțată, printr-o supremă ironie a transcendenței, de însăși strategia antimimetică prin care devine prizonier al lumii și raționalității invers mimate. Memorabil efect de *Aufhebung* în opera unui poet față de al cărui „pretins hegelianism" Jacques Derrida își exprimă în mod limpede mefiența[8].

Narcisismul exacerbat pare să-l salveze pe Domnul Teste de aporiile nebănuite ale soteriologiei gnostice. „Analogia abstractă", „purificată", în athanorul superbei lui țeste, a eliminat orice reziduu de referențialitate, pentru a se reflecta pe sine într-o autoscopie, disforică totuși, pentru că, tot grație infailibilului instrument teutonic al *Aufhebung*-ului, *auto*referențialitatea este, în același timp și în mod indecidabil, auto*referențialitate*, adică „umbră" a lumii eludate care tulbură *ludus*-ul hedonist al eului narcisic. „Cumplit este demonul analogiei abstracte! Știți bine cât mă chinuiește uneori!"[9] În „memoriile" Dlui Matila Ghyka, „afecțiunea impersonală" față de Valéry și sentimentul că se află în preajma „unui geniu la fel de universal și de puternic ca Platon"[10] nu sunt străine de faptul că „amplele cunoștințe matematice" ale poetului francez, „curiozitatea lui nelimitată", precum și „dragostea pentru arte, în mod deosebit pentru arhitectură" i-au stimulat interesul pentru „estetica geometrică" elaborată de savantul român. Introducerea la *Le nombre d'or* (1931) exprimă profunda afinitate cu gândirea lui Matila Ghyka a celui care înălțase în *Les charmes*, arhitectura

sonoră a „cântecului coloanelor", „fiice ale Numărului de Aur"[11], iar în dialogul platonician *Eupalinos ou l'architecte* încercase „să înlănțuie o analiză și un extaz" în fața „acestei stranii apropieri a formelor vizibile cu ansamblările efemere ale sunetelor succesive", „divină analogie" care vizează o „origine intimă și universală", un „punct prețios"[12] asemeni unui „zeu" imanent „în propria-ți carne".

Mediatorul acestei convergențe este Leonardo da Vinci, a cărui „metodă" a modelat geniul juvenil al lui Valéry[13], și ale cărui desene au ilustrat tratatul *De divina proportione* (Veneția, 1509) consacrat de matematicianul și cosmograful Luca Pacioli „secțiunii de aur". Dedicația tratatului elogiază contribuția lui Leonardo, iar capitolul al V-lea îl indică pe Pitagora drept predecesor al teoriei platoniciene din *Timaios* (53 e – 56 c) privitoare la cele patru corpuri geometrice derivate din triunghi, care au stat la originea celor patru elemente (tetraedrul (piramida) — foc; octoedrul — aer; icosaedru — apă; cubul — pământ). „Criptopitagoreicul Platon"[14], cum îl numește, în mod revelator, Matila Ghyka, inspiră acest climat spiritual în care „*arhé*-ul" este dublu și schizomorf în formula clasică transmisă de *Timaios*: „Într-adevăr înainte de aceasta, elementele erau fără proporție și fără măsură; focul, apa, pământul și aerul aveau într-adevăr urme ale propriei lor naturi, dar erau toate în starea în care e de așteptat să se afle orice lucru din care zeul lipsește. Aceasta fiind natura lor în momentul când Demiurgul a început orânduirea lumii, cel dintâi lucru pe care el, Demiurgul, l-a făcut a fost să le distingă unele de altele *cu ajutorul formelor și al numerelor* (subl. n.). Zeul le-a îmbinat cât mai frumos și cât mai bine cu putință, așa cum nu erau înainte; fie-ne aceasta, mai presus de toate, principiul pe care să ne întemeiem mereu gândul" (53b)[15]. Sau în forma paradoxală, sugerată inițial, a „creșterii homotetice" a formelor[16] artistice și naturale (organice și minerale) în jurul unui nucleu însuflețit de un „puls" contradictoriu (durată umană în inima eternității capodoperei; pulsiune organică în „abisul" cristalului; regresie spre inanimat în centrul formațiunii organice vii), paradox care generalizează procesul de „mitoză" (de germinare a celulelor)[16] aflat la originea tuturor fenomenelor de creștere definibile prin conversiuni topologice întemeiate pe invariantul „numărului de aur".

În viziunea lui Matila Ghyka, „punctul", „monada geometrică", „polul", „oul absolut din care decurg nu doar numerele ci și formele regulate reprezentate de numerele figurate"[17] par să nu cunoască dedublarea. „Celula primordială", „protozoarul" geometric[18], „polul de creștere" nu cunosc „mitoza", iar „gemația triunghiulară" este „continuă" întrucât la originea ei nu stă nici o geminație[19]. Dar așa cum cita frecvent pasajul din *Timaios* în care Demiurgul discerne „formele" și „numerele" *înlăuntrul* „principiului", Matila Ghyka își amintea afirmația lui Hegel despre deceptivul „caracter enigmatic al determinării cu ajutorul numărului", explicabil prin carența lui conceptuală. „Numărul, scrie Hegel în capitolul din *Prelegeri de istorie a filozofiei*, consacrat lui Pitagora și pitagoreicilor, este continuitatea cea mai moartă, lipsită de concept, indiferentă, lipsită de opoziție... Astfel, numărul nu este în chip nemijlocit concept, — el este extrema gândului, a conceptului în suprema sa exterioritate, în modul cantitativului, al diferenței indiferente"[20].

Pentru pitagoreici, ne reamintește Aristotel, „elementele numerelor sunt elementele tuturor lucrurilor și întreg Universul se reduce la număr și armonie"[21]. În schimb, „criptopitagoreicul Platon" înscrie numărul într-o suspensie ninistă care dublează distincția dintre „idei" și „numere".

„Platon, scrie Aristotel, mai afirmă că, între lucrurile sensibile și Idei mai există, ca intermediare, Obiectele matematice, deosebite de lucrurile sensibile prin aceea că sunt veșnice și neschimbătoare, iar de Idei prin aceea că ele există într-o pluralitate indefinită de exemplare asemănătoare, pe când fiecare Idee există doar într-un singur exempar"[22]. În epoca de formare a personalității lui Matila Ghyka, în Franța, Henri Bergson gândea „mitoza" sub forma „tendințelor divergente și complementare", ale „creșterii" și, într-o formă pură de pitagoreism preplatonician, gândea, în *L'évolution creatice* (1907), „posibilitatea unei geneze simultane a materiei și a inteligenței" și, în consecință, ipoteza unei „geometrii inerente materiei". „Astfel, spune el, anterior geometriei savante, există o geometrie naturală ale cărei limpezime și evidență le depășesc pe cele ale celorlalte deducții"[23]. Gândirea lui Bergson (cu excepția „elanului vital") constituie un stimul prețios în procesul prin care

Matila Ghyka depășește ceea ce el numește „faza determinismului absolut"[24] pentru ca excluzând „metafizica", urmărind doar indicațiile fizicii și termodinamicii, fără a introduce nici o ipoteză „vitalistă", să afirme existența „diferenței transcendentale dintre materia organică și cea inorganică" și să elaboreze, cu ajutorul „numărului de aur", „testul matematic al transcendenței vieții"[25]. Transcendental al „gemației"[26] și, deopotrivă, al geminării naturii (organice și anorganice) și a naturii și artei.

NOTE

[1] *Philosophie et mystique du nombre*, p. 7, Payot, 1978.

[2] *Ibid.*, p. 50.

[3] *Ibid.*, p. 9.

[4] Doxografii susțin că Pitagora a fost primul grec care a renunțat la prezumțiosul termen *sophos* (înțelept) și l-a folosit pe cel de la *philosophos* (prieten al înțelepciunii) pentru a numi, în chip mai „orthothetic" și mai „cratylean" statutul real al gânditorului.

[5] *Philosophie et mystique du nombre*, *op. cit.*, p. 27.

[6] Cf. sonetul *Correspondances* din volumul *Les Fleurs du Mal* (1857).

[7] Stéphane Mallarmé, *Le démon de l'analogie* din volumul *Divagations* (1897).

[8] „Desigur. Putem citi în acest fel textul lui Mallarmé, reducându-l la un strălucitor idealism literar. Par, într-adevăr, să ne invite la o astfel de lectură întrebuințarea frecventă a cuvântului *Idee*, adesea mărit și personificat, parcă, printr-o majusculă, ca și istoria pretinsului hegelianism al autorului. Și puțini sunt cei care au refuzat invitația". —Jacques Derrida, *Diseminarea*, Univers Enciclopedic, 1997, p. 200 (trad. de Cornel Mihai Ionescu). În cazul de față nici eu nu „refuz invitația", pentru simplul motiv că „lectura... nu mai procedează aici ca o simplă listă de concepte sau de cuvinte, precum o punctare statică sau statistică" (*ibid.*). Ea pune în evidență, acum, mecanismul de *Aufhebung* care operează, în mod inconștient, în orice proiect gnostic de soteriologie întemeiată pe anti-mimesis și parodie a creației divine.

[9] Paul Valéry, *Lettre d'un ami*, în *Monsieur Teste* (1896).

[10] Matila Ghyka, *The World Mine Oyster*, Heinemann, London, 1961, p. 272.

[11] *La cantique des colonnes*.

[12] Paul Valéry, *Eupalinos ou l'architecte*, Paris, NRF, Gallimard, 37e édition, 1924, pp. 111–112.

[13] Id., *Introduction à la methode de Léonard de Vinci* (1895).

[14] Matila Ghyka, *The World Mine Oyster*, *op. cit.*, p. 321.

[15] Platon, *Opere*, VII, București, Editura Științifică, pp. 168–169 (trad. de C. Partenie).

[16] Cf. André Hermant, *L'architecture des plantes*, *Technique et Architecture*, Paris, 1947.

[17] Matila Ghyka, *Philosophie et mystique du nombre*, *op. cit.*, p. 80.

[18] *Ibid.*

[19] *Ibid.*, p. 68.

[20] G. Fr. W. Hegel, *Prelegeri de istorie a filozofiei*, București, Editura Academiei R.P.R., 1963, vol. I, p. 192.

[21] Aristotel, *Metafizica*, 986 a, București, IRI, 1996, p. 33.

[22] *Ibidem*, 297 b, pp. 40–41. Numărul, rezumă Hegel, „se află la mijloc, între sensibil și gânduri (general, suprasensibil)... În consecință, numărul nu este de natură sensibilă, dar nu e încă nici gândul". (Hegel, *op. cit.*, p. 191).

În opusculul *De substantiis separatis (Despre substanțele separate)* Toma din Aquino reproduce fidel atât „mitoza" „arheului" cât și „suspensia" numerelor între arhetipuri și formele sensibile: „...Platon distingea două feluri de lucruri separate de ființele sensibile, și anume, formele matematice și cele universale (*mathematica et universalia*), pe care le numea imagini sau idei (*species seu ideas*). Există totuși această diferență între cele două, că în obiectele matematice putem vedea mai multe lucruri sub o singură figură... ceea ce nu este cu putință în cazul imaginilor, în care întregul unui lucru este prins în sensul general în idee. În felul acesta, obiectele matematice așează un termen mediu între imagini sau idei și lucrurile sensibile (*media inter species seu ideas et sensibilia*), care au acest raport cu obiectele materiale, că mai multe sunt cuprinse în aceeași idee. Și se deosebesc de ele, precum imaginile de materia sensibilă" (*Opuseules* de Saint Thomas d'Aquin, Paris, Librairie philosophique Jules Vrin, 1986, pp. 156–157).

Pe urmele destinației tomiste între Unul metafizic și Unul matematic (*Summa theologiae*, I, XI, 3), Nicolaus Cusanus, în dialogul *Idiota (Profanul)* suprimă „suspensia" numărului între inteligibil și sensibil, identificând „numărul divin" cu „forma" însăși și transferând asupra întregului univers „schizomorfia", „principiului" („formă" vs „număr"): Pitagoricienii, despre care spui că au aplicat tuturor lucrurilor o filosofie a numărului, sunt, după părerea mea, oameni serioși și subtili, dar nu cred că au vrut să vorbească despre număr ca despre o ființă matematică născută din gândirea noastră. Căci se înțelege de la sine că un astfel de nume nu poate fi principiu nimic. Mai curând, ei au vorbit în mod simbolic și rațional de acest Număr care provine din Gândirea divină și față de care numărul matematic este doar o imagine. Aceeași relație, care leagă gândirea noastră de Gândirea infinită și veșnică se regăsește între numărul născut din gândirea noastră și Numărul divin, iar noi îi aplicăm numele de număr, care ne este cunoscut, după cum aplicăm Gândirii divine numele gândiri noastre; și resimțim o mare bucurie când ne adâncim în speculațiile numerice, pentru că ele corespund propriei noastre opere", în *Œuvres choisies* de Nicolas de Cues, traduction et préface de Maurice de Gandillac, Paris, Aubier, Editions Montaigne, 1962, p. 274.

Substituind „participația" prin mijlocirea „obiectelor matematice" cu aceea a simulacrului la prototip, subtilul Cardinal „de-cryptează" pitagorismul lui Platon și restituie, din perspectiva platonismului, o prezentare mai genuină a aritmosofiei pitagoreice.

[23] Henri Bergson, *L'évolution créatrice*, 37e édition, Paris, Libraire Félix Alcan, 1930, p. 230. Prin afirmația surprinzătoare și inexactă, potrivit căreia „Platon a erijat esențele matematice în realități absolute", Bergson atribuie lui Platon esența gândirii pitagoreicilor, ignoră regimul „ninist" al „obiectelor matematice" și distincția între

„forme" și „numere" înlăuntrul „principiului" (cf. *Philebos*) și parodiază involuntar poziția lui Nicolaus Cusanus (*op. cit.*, p. 229, n. 1).

[24] Matila Ghyka, *The World Mine Oyster, op. cit.*, p. 56.

[25] *Ibid.*, pp. 54–55, 307–309.

[16] Pitagora, spune Diogenes Laertios, era „fiul unui gravor de pietre prețioase", *Despre viețile și doctrinele filozofilor*, București, Editura Academiei, R.P.R., 1963, Cartea VIII, cap. I, p. 395.

LA EDITURILE IRI ŞI UNIVERS ENCICLOPEDIC AU APĂRUT:

Mircea Seche, Luiza Seche – Dicționarul de sinonime al limbii române	69.900 lei
Bujor T. Râpeanu, Cristina Corciovescu – Dicționar de cinema	47.500 lei
Îndreptar ortografic, ortoepic și de punctuație	16.000 lei
Larousse – Dicționar de civilizație musulmană	24.900 lei
Larousse – Dicționar de civilizație egipteană	22.500 lei
Larousse – Dicționar de psihanaliză	24.900 lei
Larousse – Dicționar de sociologie	10.500 lei
Larousse – Dicționarul spațiului	32.000 lei
Jacques Derrida – Diseminarea	26.900 lei
Marcel Gauchet – Inconștientul cerebral	14.900 lei
Jeanne Ancelet-Hustache – Meister Eckhart și mistica renană	17.900 lei
Patricia Hidiroglu – Apa divină	16.900 lei
François Brune – Hristos și Karma	17.000 lei
G. Dumézil – Zeii suverani ai indoeuropenilor	24.900 lei
Rudolf Steiner – Mistica. Gând uman, gând cosmic	14.900 lei
Rudolf Steiner – Evanghelia după Luca	16.900 lei
Rudolf Steiner – Pragul lumii spirituale	12.900 lei
Rudolf Steiner – Din cronica Akașa	11.900 lei
Jeanne Guesné – Corpul spiritual	18.900 lei
W. Shakespeare – Furtuna	6.000 lei
W. Shakespeare – Regele Lear	16.900 lei
Aristotel – Organon (vol. I)	26.900 lei
Th. Ribot – Voința și patologia ei	11.900 lei
Frieda Fordham – Introducere în psihologia lui C.G. Jung	19.900 lei
Leonard Gavriliu – Inconștientul în viziunea lui Lucian Blaga	14.900 lei
Vasile Tonoiu – În căutarea unei paradigme a complexității	11.900 lei
William Golding – Oameni de hârtie	15.900 lei
Iris Murdoch – Dilema lui Jackson	24.900 lei
Eugen Simion – Dimineața poeților	30.000 lei
Petru Creția – Norii	7.500 lei
Tudor Opriș – Zoologia	14.900 lei
Copacul fermecat – Povești	3.500 lei
Luminița Bădeliță – Analiza matematică clasa a XII-a	3.900 lei
Mihai Retegan, Cornel Lungu – 1956 – Explozia	13.900 lei

A. Răduțiu și L. Gyémânt – Repertoriul izvoarelor statistice privind Transilvania (1690–1847)	10.000 lei
Mircea Rebreanu – Optimismul nostru	3.900 lei
Mircea Rebreanu – Semnificația secolului nostru	9.900 lei
Mircea Rebreanu – În spațiul cultural al Carpaților	9.900 lei
Mircea Rebreanu – Gândirea filosofică română	8.900 lei
Michael Crichton – Terminalul uman	10.900 lei
Album – Berthelot și România	27.000 lei

LA EDITURILE IRI ȘI UNIVERS ENCICLOPEDIC VOR APĂREA:

Rudolf Steiner – Omul suprasensibil în concepția antroposofică	18.900 lei
Larousse – Dicționar de filosofie	32.900 lei
Karen Horney – Personalitatea nevrotică a epocii noastre	22.900 lei

Comandând prin poștă o carte apărută la una din editurile IRI sau UNIVERS ENCICLOPEDIC obțineți o reducere de:

15%

Pentru comenzi cu o valoare mai mare de 60 000 lei obțineți o reducere de:

20%

Costul expedierii prin poștă e suportat de edituri.

Adresa: CP 33–2, București, România
Tel.: (401) 222 62 86, 092 314 407
(401) 223 15 30 / int. 1606, 1030, 1430